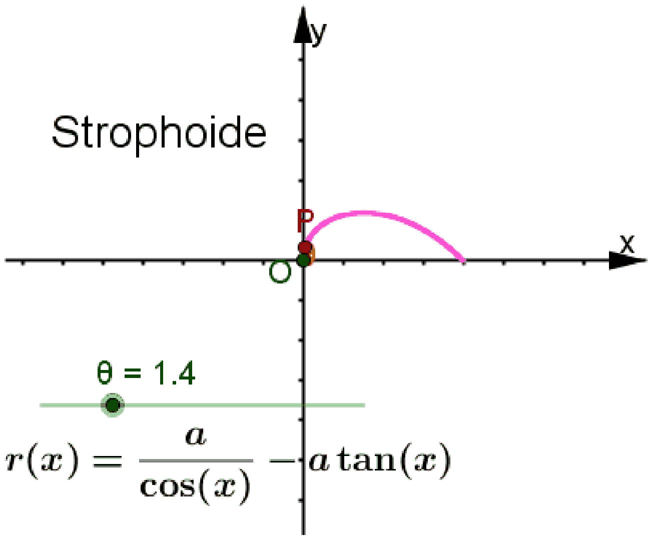
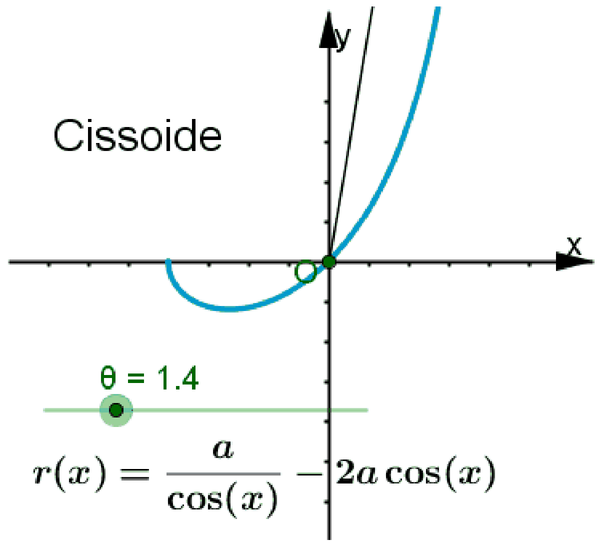
Ist das nun dieselbe Schlaufe?





Vielfältige Argumente und eigenes Erkunden von Klasse 8 bis zum 8. Semester

Beweisbedürfnis und Beweise erleben

- Sie hörten: Ausführungen zu Argumentationen und Begründungen im jungen Schulalter.
- Sie hörten: Herausarbeitung von Kernideen im Analysis-unterricht, die nach gesicherter Fundierung rufen.

Nun folgt:

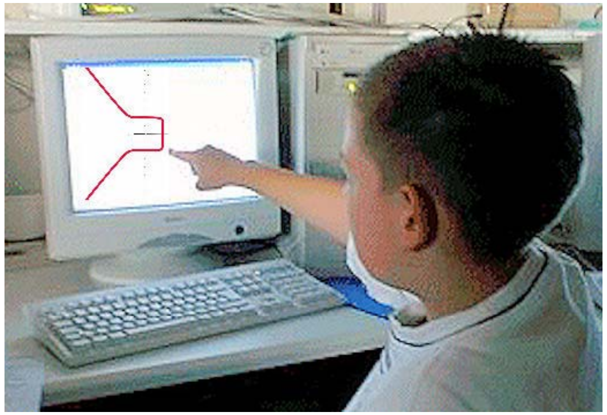
- Typische **Beweisanlässe** im Unterricht zu **Kurven**,
- die die Entwicklung vielfältiger **Beweisideen** ermöglichen und damit
- in hohem Maße **Freiheiten** bieten und
- die Entwicklung **mathematischen Handwerks** fördern.

Beweisbedürfnis und Beweise erleben

- NUTZEN für: Klasse 8 bis 8. Semester ?!

?!?!?!?!?

Wie man das verstehen soll, ergibt sich unterwegs



Kurven erkunden und verstehen

- Mein Buch ist in Arbeit!

ab Winter 2016/17

Auf der Kurven-Website finden Sie diesen Vortrag und die interaktiven Dateien

Bis dahin

und Bereich Kurven

www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Schlaufenvielfalt

Strophoide = Schlaufe 1 **Seilkurve**

geometrische Definition

Polargleichung

Verstehen der polar-kartesische Koppelung

$= ? \neq$ **Wann sind zwei Kurven gleich?** $= ? \neq$

Schlaufe 2 mit Polargleichung aus der Animation

Unterschied verstandenen, nichts ist bewiesen

Schlaufe 3 Logozyklika

Schlaufe 4 Rasterschlaufe

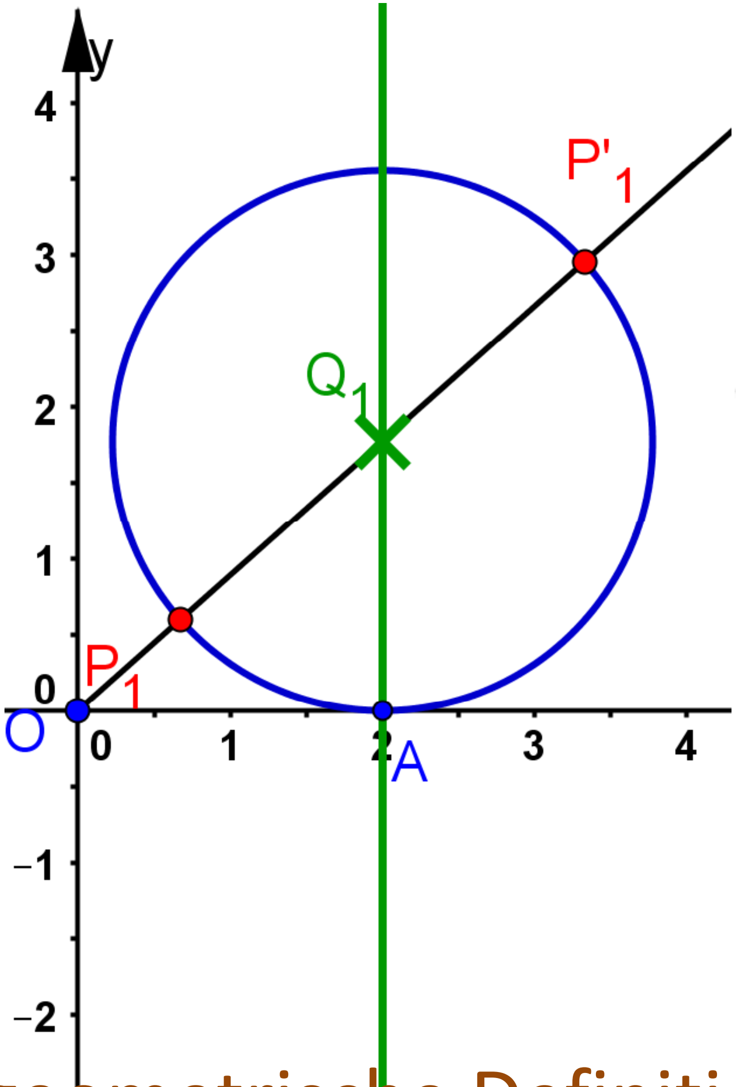
Schlaufe 5 Trisektrix

Schlaufe 6 Konchoide

Schlaufe 7 Cissoide $= ? \neq$

Wie kann man hier Vermutungen beweisen?

Strophoide Original Definition



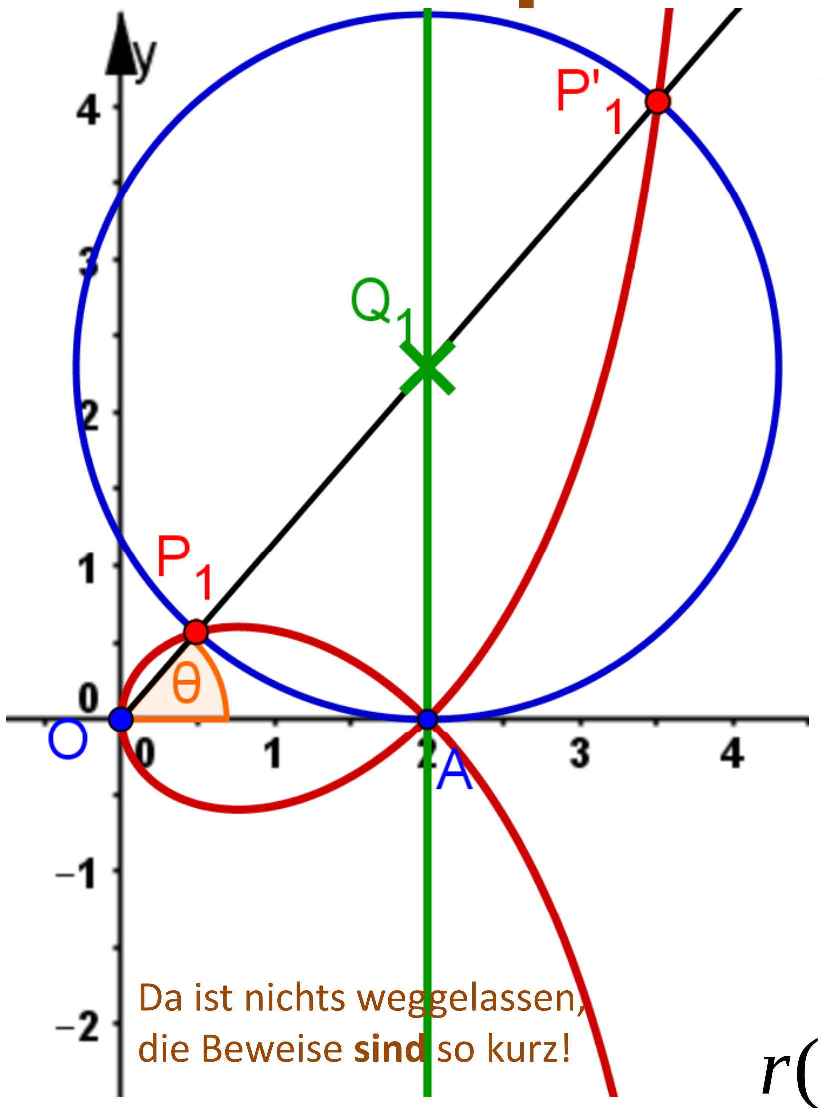
Grün: Beweglich, Q auf Weg

Blau: geometrische Elemente

Rot: Ergebnis Ortskurve

geometrische Definition

Strophoide Polargleichung



$$a\tan(\theta) = \overline{AQ_1} = \overline{PQ_1}$$

Grün: Beweglich, Q=(u,v) auf Weg

Blau: geometrische Elemente

Rot: P=(x,y), Ergebnis Ortskurve

Asymptote?

Sichere Punkte?

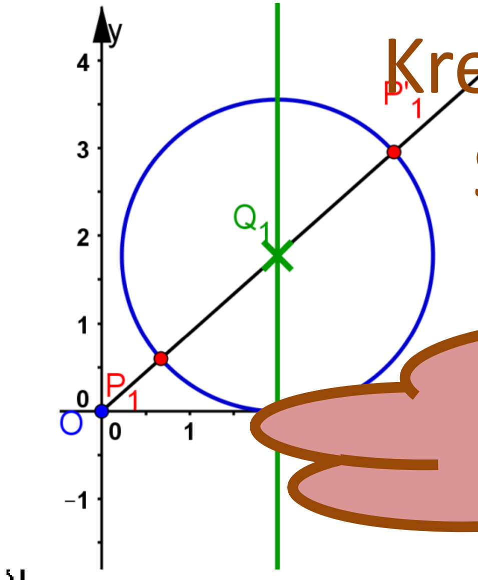
Polargleichung für den Weg

$$\rho = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

Polargleichung Strophoide

$$r(\theta) = \rho - \overline{PQ_1} = \frac{a}{\cos(\theta)} - a\tan(\theta)$$

Strophoide kartesische Gleichung



Kreis um Q enthält P $(x-a)^2+(y-v)^2=v^2$

Strahlensatz $\dfrac{v}{a}=\dfrac{y}{x}$, v eliminieren, fertig!

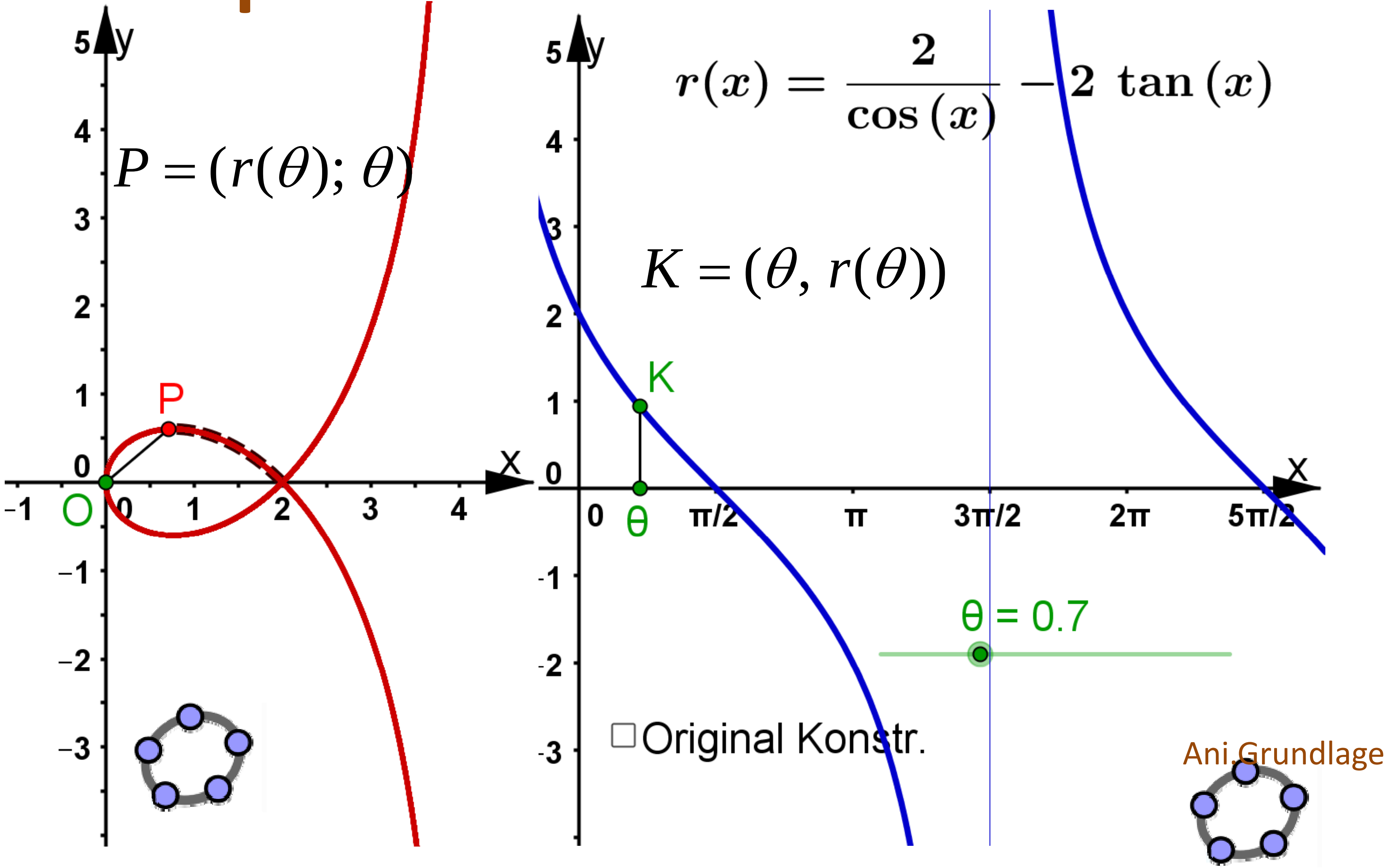
Beweisen-Lernen braucht hilfreiche Strukturen

Weg 1 Selbst eliminieren: $(x-a)^2+(y-\frac{ya}{x})^2=(\frac{ya}{x})^2$ ergibt $x^2(x-a)^2+(yx-ya)^2=y^2a^2$, dann $(x^2+y^2)(x-a)^2=a^2y^2$. Dieses ist eine algebraische Gleichung 4. Grades.

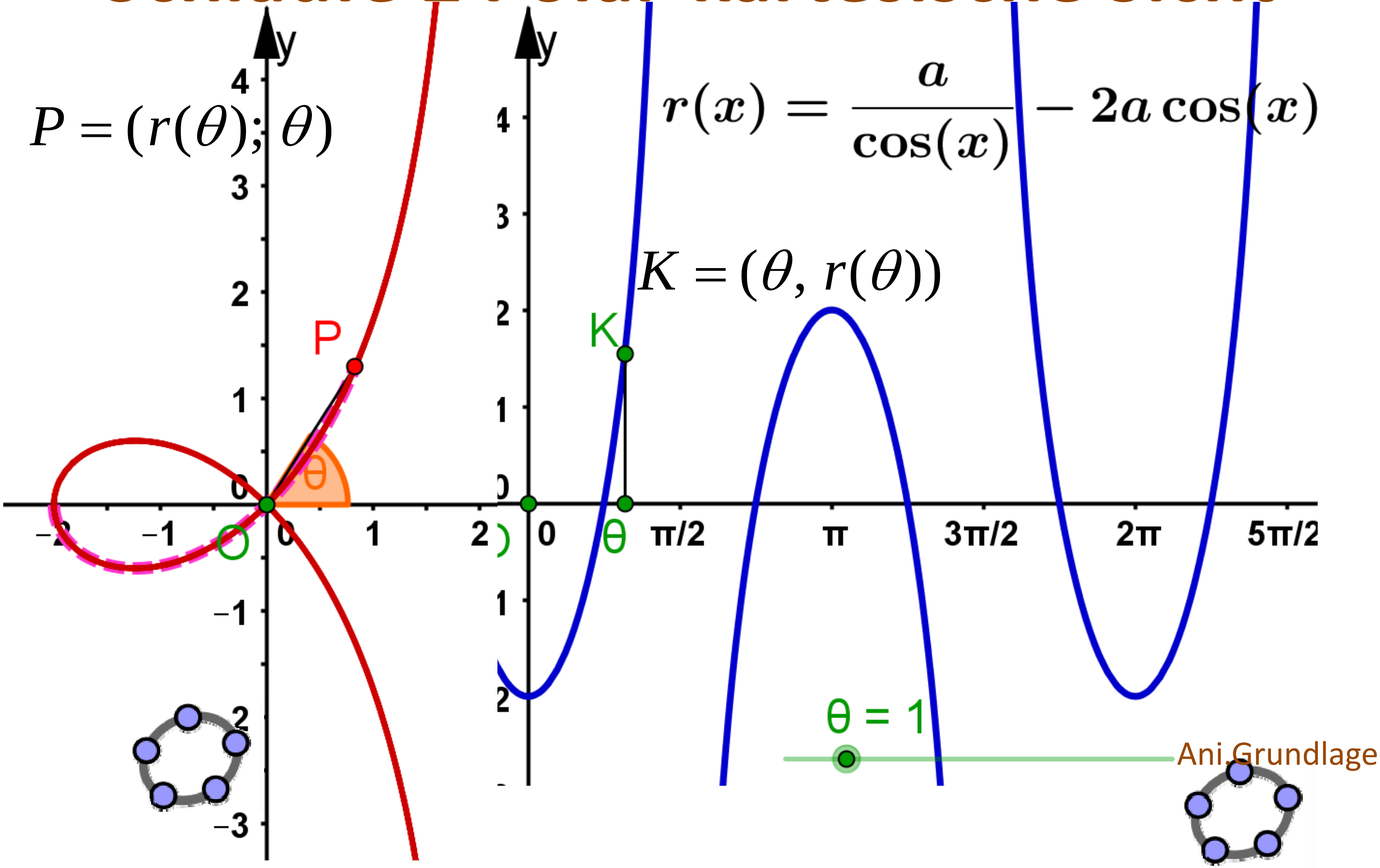
Weg 2 Anders zusammenfassen: $x^2(x-a)^2+y^2(x^2-2ax+a^2)=y^2a^2$ ergibt $x^2(x-a)^2+xy^2(x-2a)=0$, Division durch x, da $x\neq 0$, hat zur Folge $x(x-a)^2-y^2(2a-x)=0$, Gleichung 3. Grades, etwa so in Büchern.

Weg 3 Mit Eliminate und Simplify, siehe Abschnitt 1.1.4.2 oder Abschnitt ??, ent $x(a^2+x^2+y^2)=2a(x^2+y^2)$.

Strophoide Polar-kartesische Sicht



Schlaufe 2 Polar-kartesische Sicht



Schlaufe 1 $= \; ? \; \neq$ Schlaufe 2

Verstanden, warum der Durchlauf **verschieden** ist!

Aber was heißt **Gleichheit** bei Kurven?

Zwei Kurven sind von gleichen Typ, wenn sie als geometrische Punktmengen kongruent oder ähnlich (i.e.S) sind.

Um dieses nachzuweisen, bringt man sie **in gleiche Lage und Größe**. Sei C1 die bekannte Kurve und C2 die „neue“ Kurve.

Wir stellen uns vor, man habe die neue Kurve C2 mit einer geometrischen Konstruktion gefunden.

Dazu folgen bald mehrere Beispiele!

Schlaufe 1 $= ? \neq$ Schlaufe 2

Weg 1 **Eine Gleichung** von C1 in der **Geometrie** von C2 eintragen. Wenn‘s nicht passt, ist entschieden: Die Kurven sind ungleich. Anderenfalls: **Weg 2, 3, 4, 5**

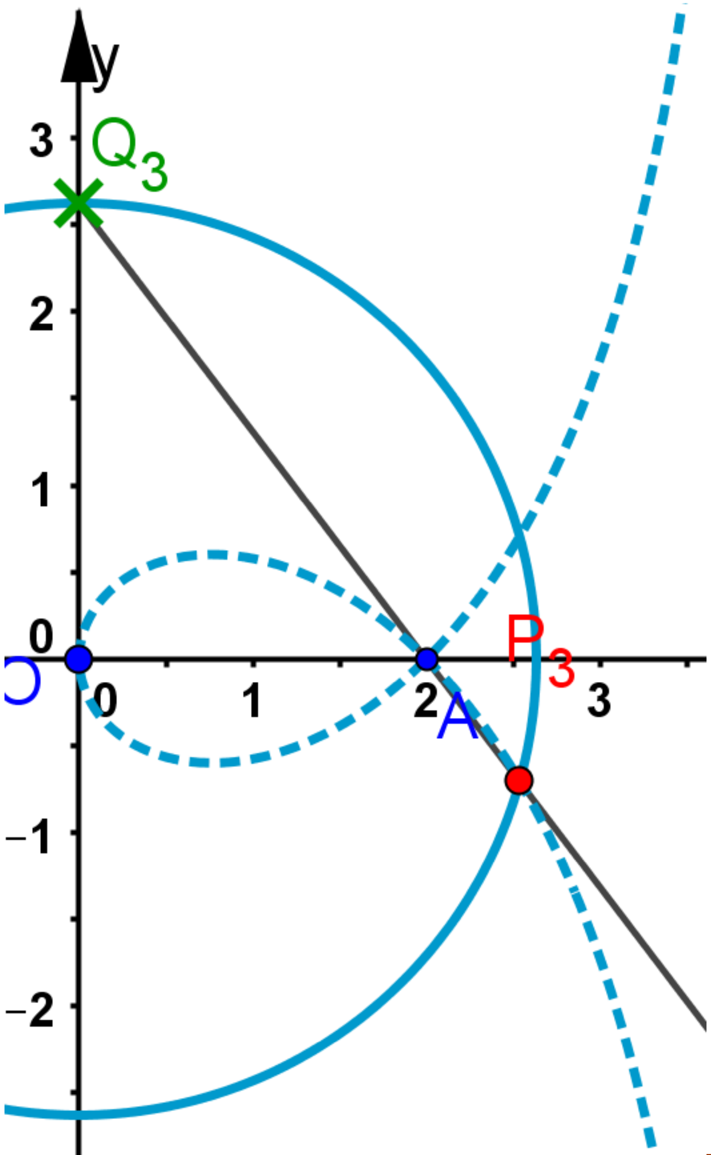
Weg 2 **Geometrie** von C1 in **Geometrie** von C2 finden, geometrisch beweisen: P aus C2 ist ein P von C1.

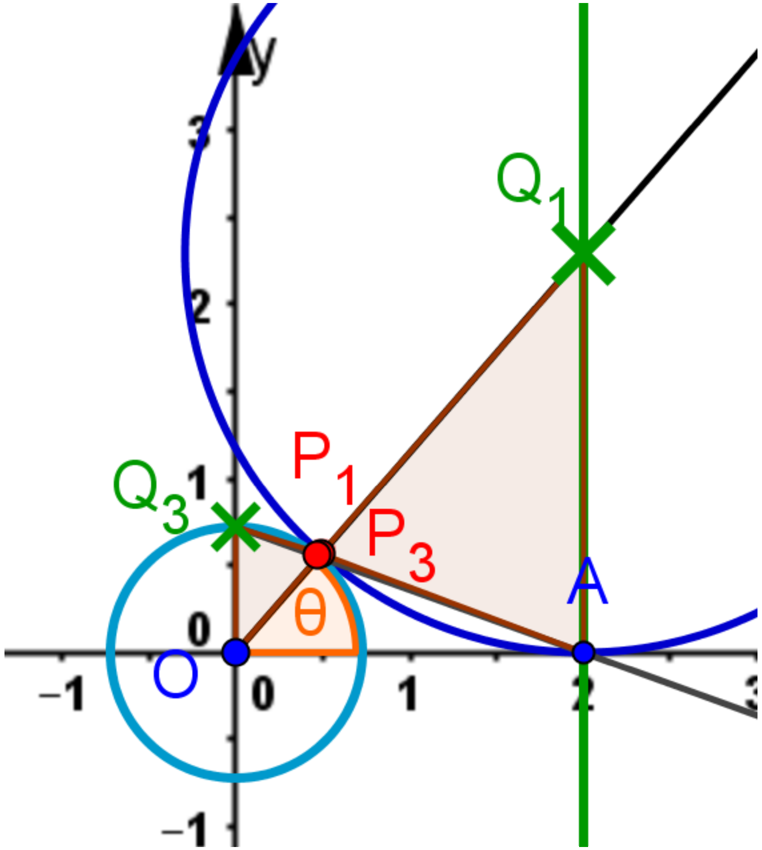
Weg 3 Für C2 **kartesische Gleichung** aufstellen und nach algebraischer Umformung suchen, die die **kartesische Gleichung** von C1 ergibt.

Weg 4 Wie Weg 3, aber für die **Polargleichung**. Vorsicht! Trigonometrische Funktion sind „vielgestaltig“.

Weg 5 Spezifische Überlegungen mit der gegenseitigen Lage wichtiger Elemente wie sicheren Punkten, Asymptoten, wichtigen Winkeln u.s.w.

Strophoide = ? ≠ Schlaufe 3

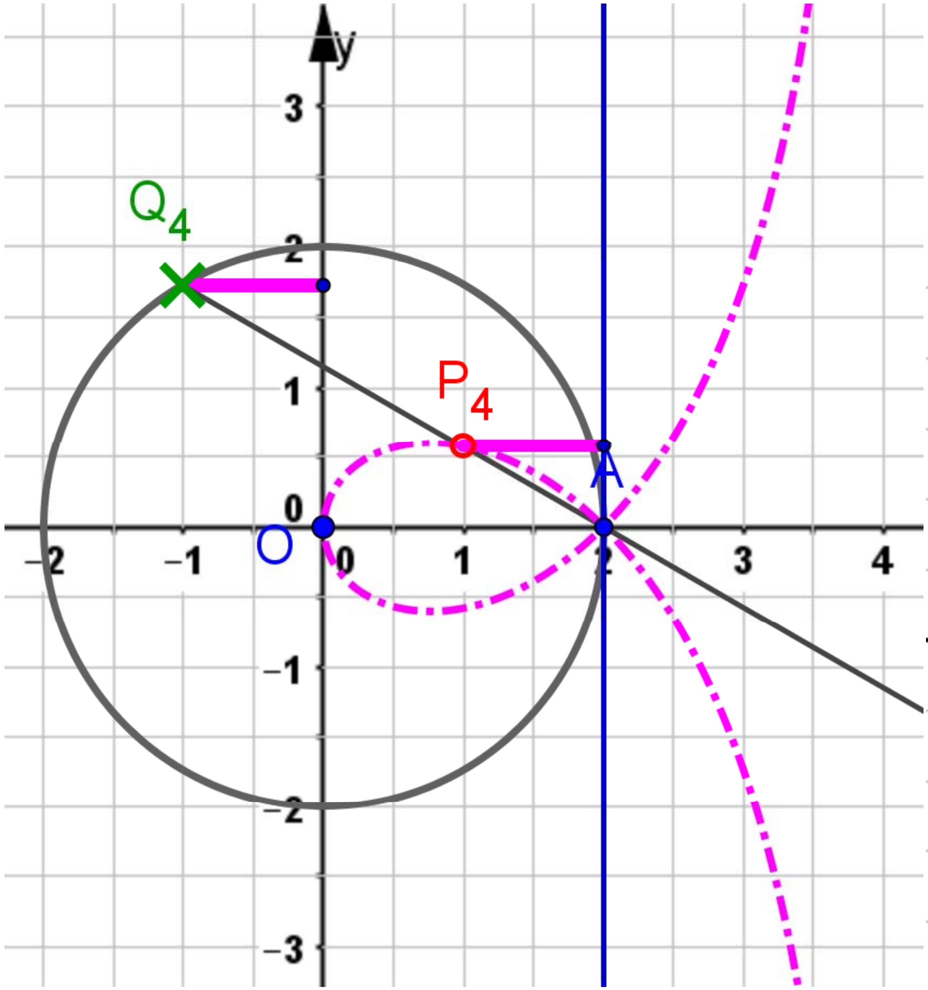


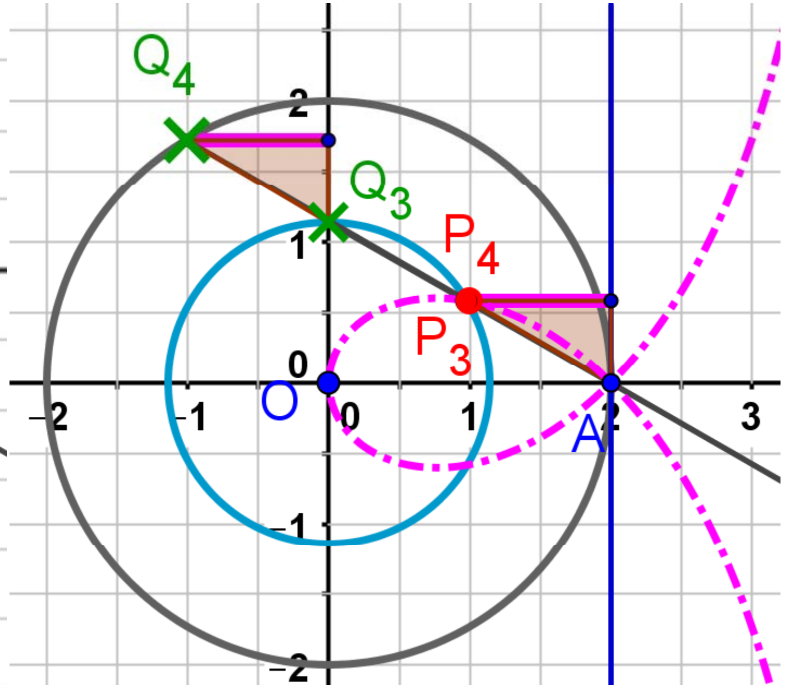


Schlaufe 3 ist die Strophoide

Strophoide $= ? \neq$ Schlaufe 4

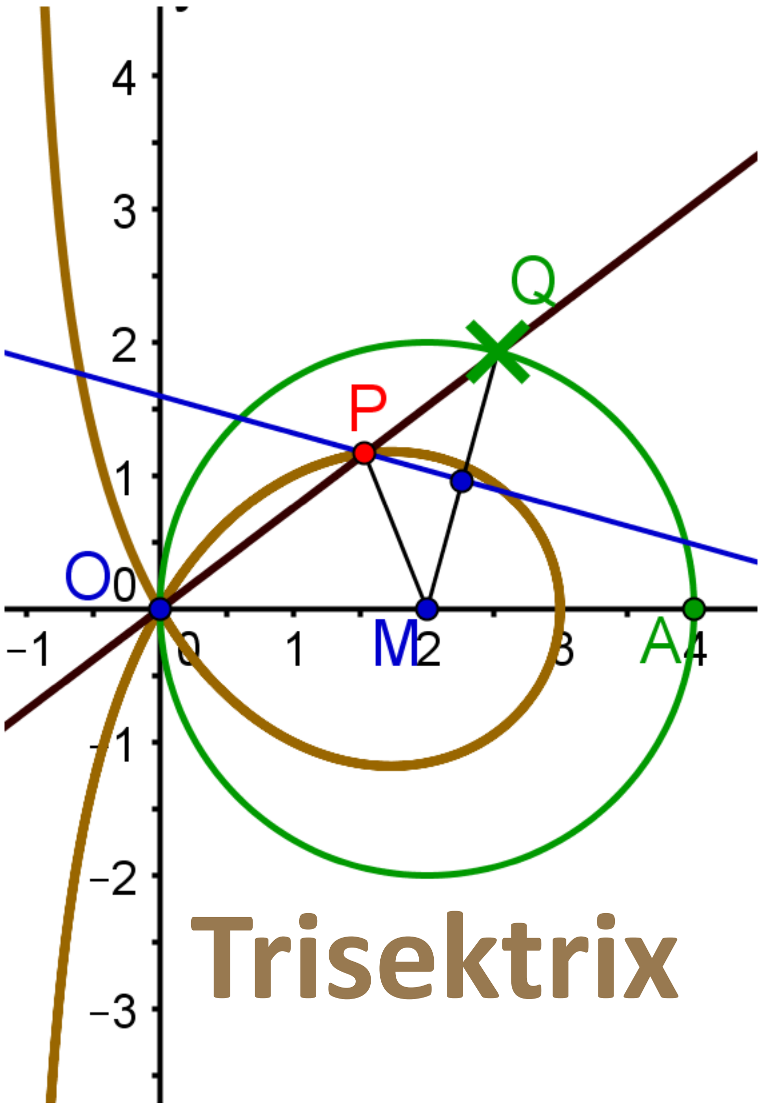
Raster-
Konstruktion
klausurfähig

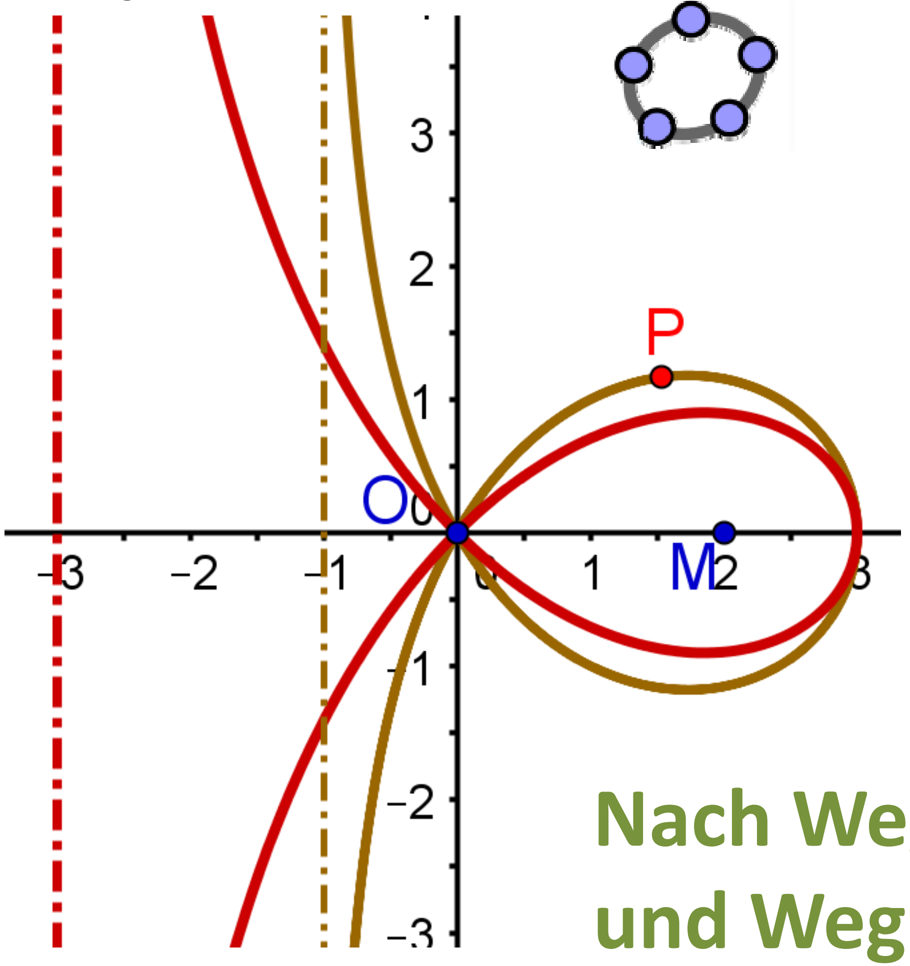




Schlaufe 4 ist die Strophoide

Strophoide $= ? \neq$ Schlaufe 5

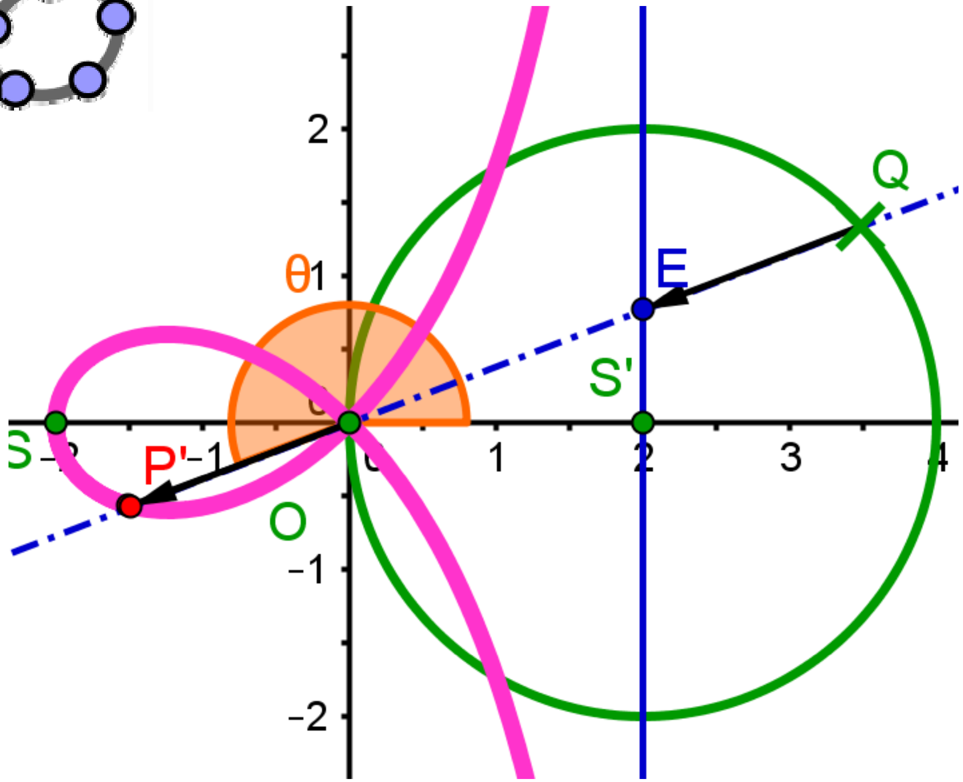


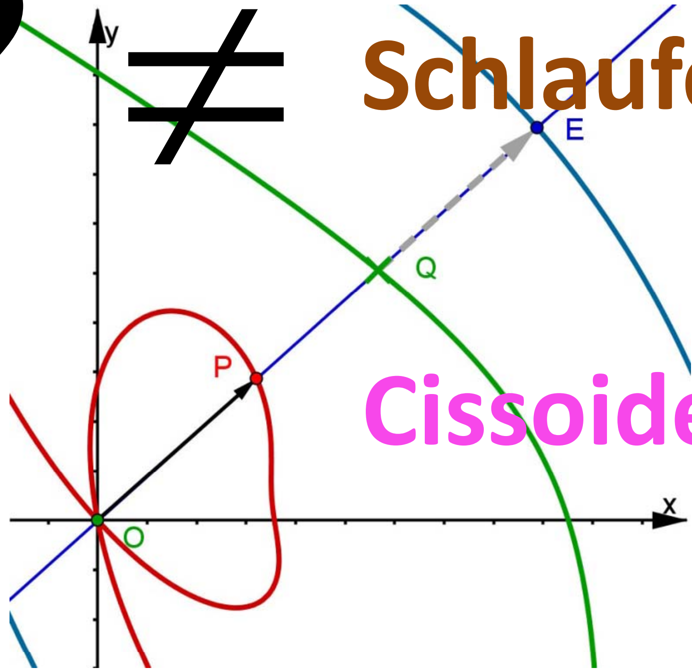


Nach Weg 1 und Weg 5

Schlaufe 5 ist keine Strophoide

Strophoide $=$? $\neq$ Schlaufe 2





Cissoiden

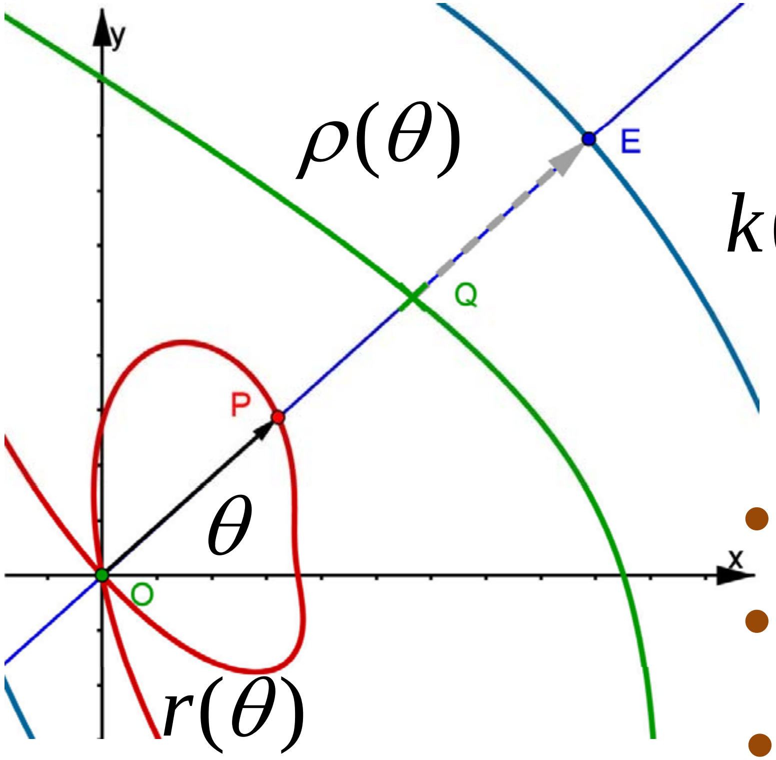
$r_{rot} = r_{blau} - r_{grün}$

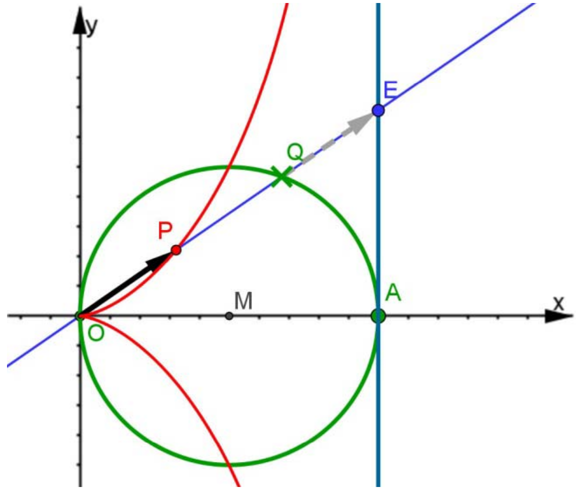
$$r(\theta) = \frac{a}{\cos(\theta)} - 2a\cos(\theta)$$

und diese Polargleichung

passt zu $(a-x)y^2 = (a+x)x^2$ der verschobenen Strophoide **Die Strophoide ist eine spezielle Cissoide.**

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide





- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
- Vektor QE an O anhängen ergibt P

$$r(\theta) = k(\theta) - \rho(\theta)$$

Strophoide verschieben

$$x(x-a)^2 = y^2(2a-x)$$

$$x \longrightarrow x+a$$

$$(x+a)(x+a-a)^2 = y^2(2a-x-a)$$

$$(x+a)(x^2) = y^2(a-x)$$

Polargleichung der Strophoide in verschobener Lage

$$(a-x)\,y^2 = (a+x)\,x^2 \qquad c = \cos(\theta)$$

$$(a-rc)\,r^2 s^2 = (a+rc)\,r^2 c^2 \;\Big|:r^2 \qquad s = \sin(\theta)$$

$$a s^2 - a c^2 = r c s^2 + r c c^2$$

$$a(1-c^2-c^2) = r c$$

$$a(1-2c^2) = r c$$

$$r(\theta) = \frac{a}{\cos\theta} - 2a\cos\theta$$

Schlaufenvielfalt gebändigt!

Unsere Grundlage war die gewöhnliche Strophoide

= Schlaufe 1 **Seilkurve**

Die allgemeinen **Cissoiden** sind eine große Kurvenklasse.

Die gewöhnliche Strophoide ist eine spezielle Cissoide. Erkenntnis zu Schlaufe 2 $=!$

Schlaufe 3 Logozyklika $=!$

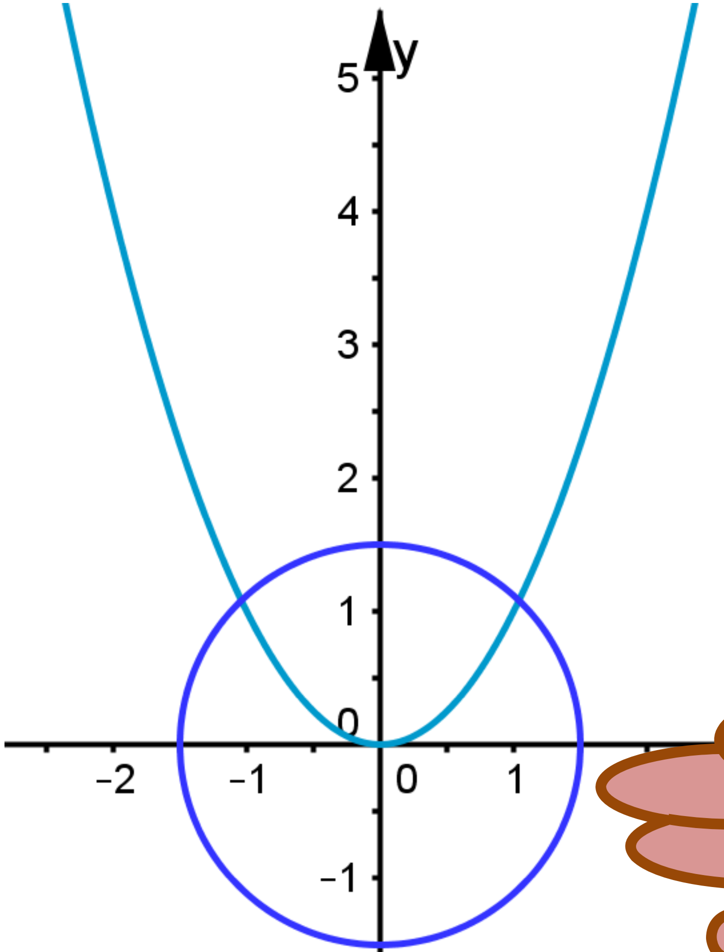
Schlaufe 4 Rasterschlaufe $=!$

Das waren einfache alternative Konstruktionen

Schlaufe 5 Trisektrix $\neq!$, sie ist keine Strophoide

Aber sie ist auch eine spezielle Cissoide

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=h$$

Wenn hier keine 0 steht?

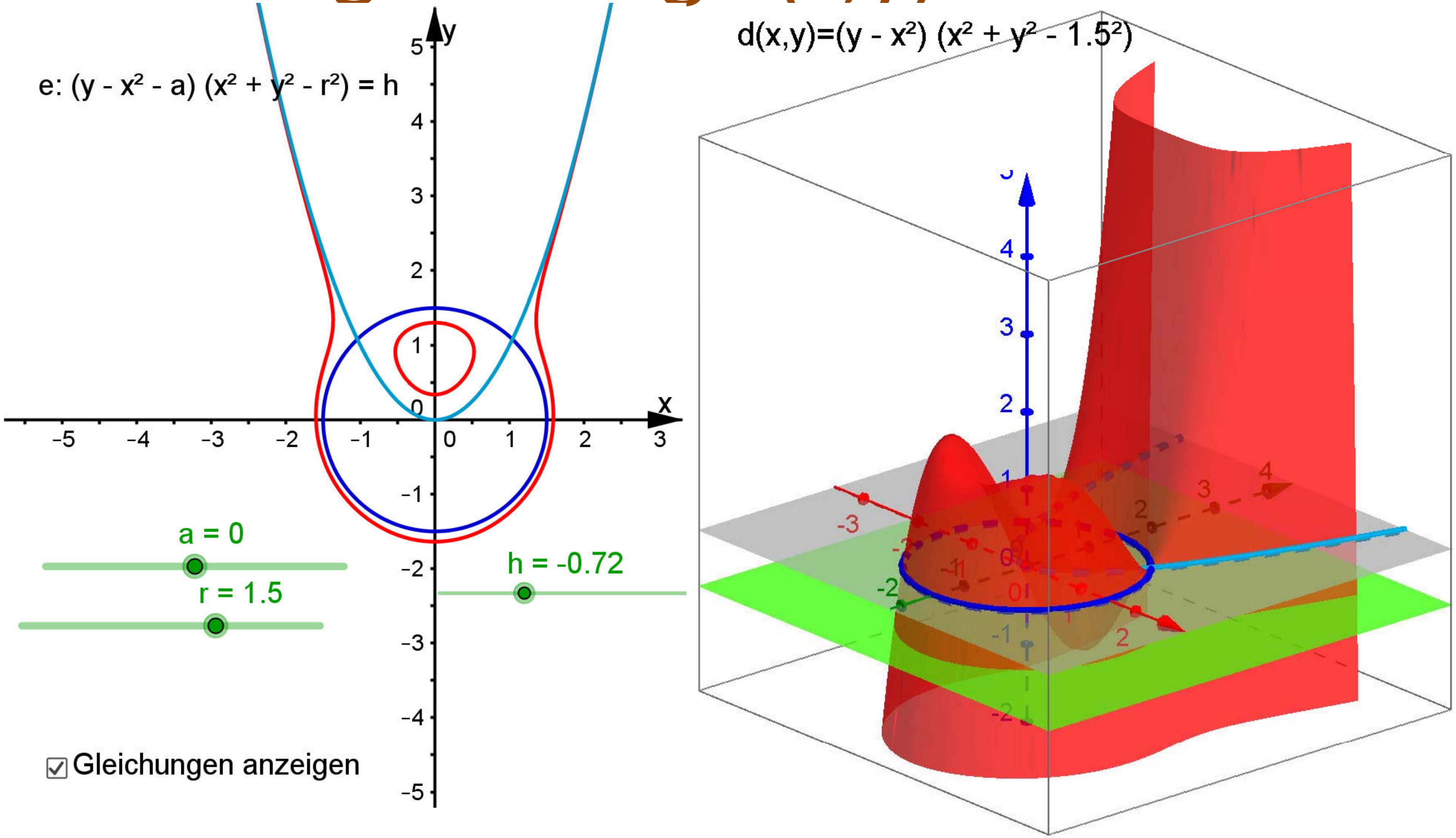
Dann hilft die 3D-Dar-
stellung beim Verstehen

produkt-ohne3D

$$z=f(x,y)=(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

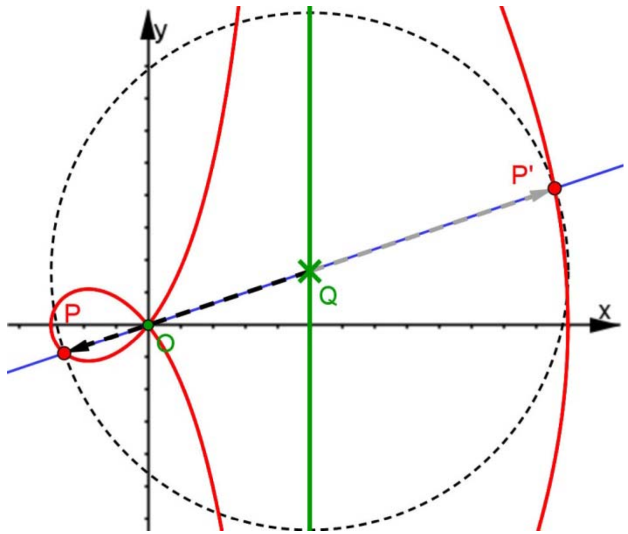
Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



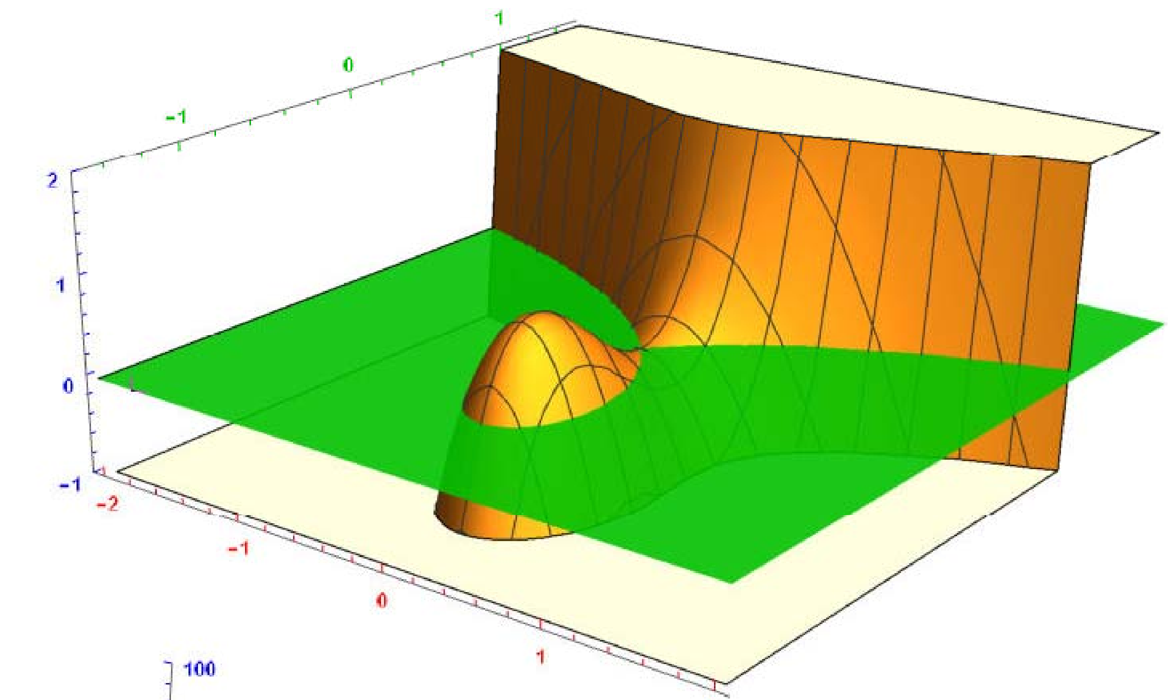
produkt3D Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

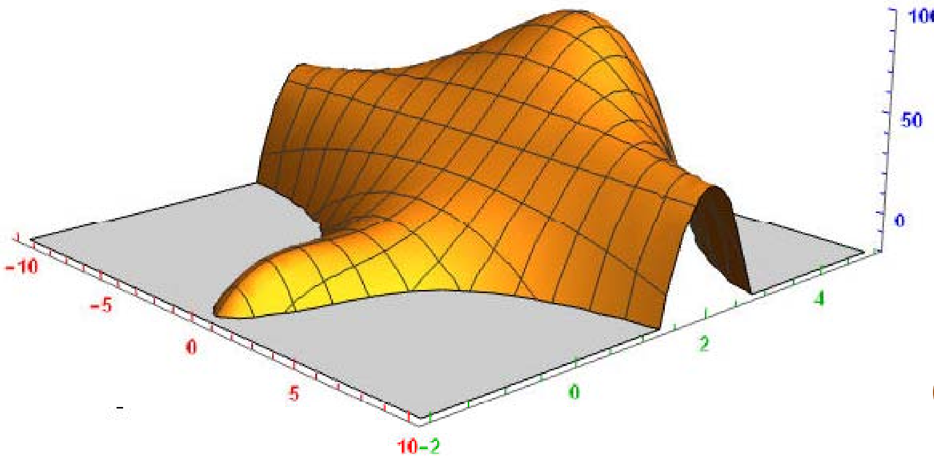
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

3D-Darstellungen anderer Kurven



Konchoide



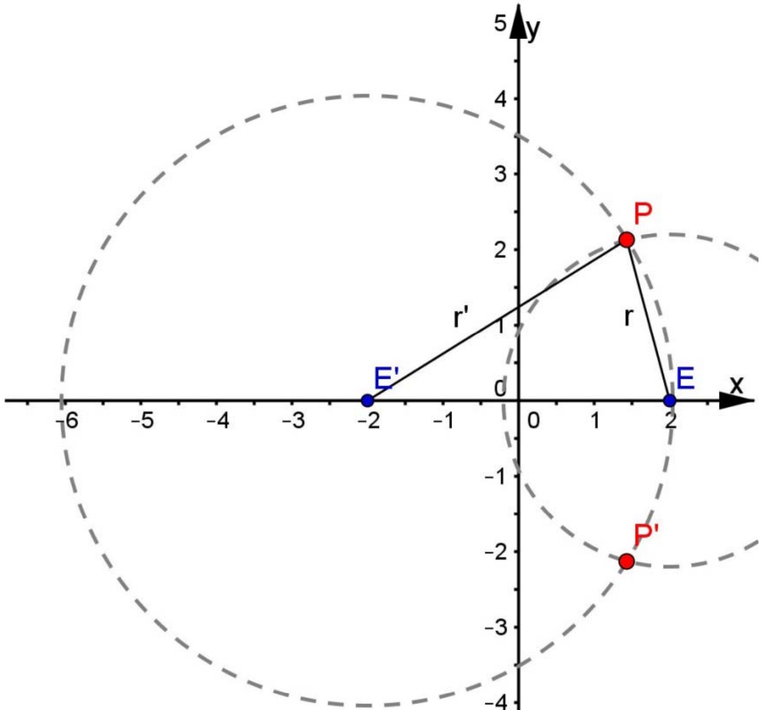


Durch Schnitte in anderer Höhe bilden sich Kurvenfamilien.

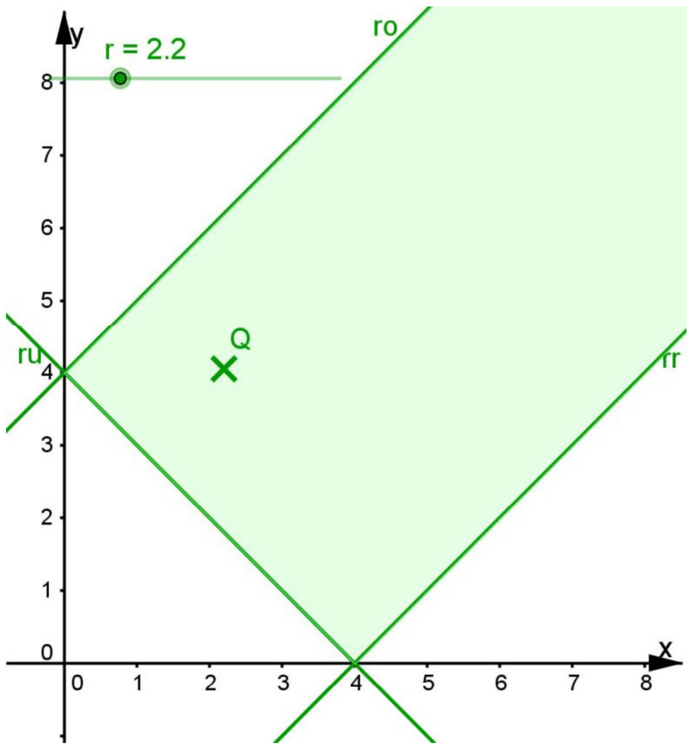
Doch manchmal kommt es anders als man denkt.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine bipolare Kurven



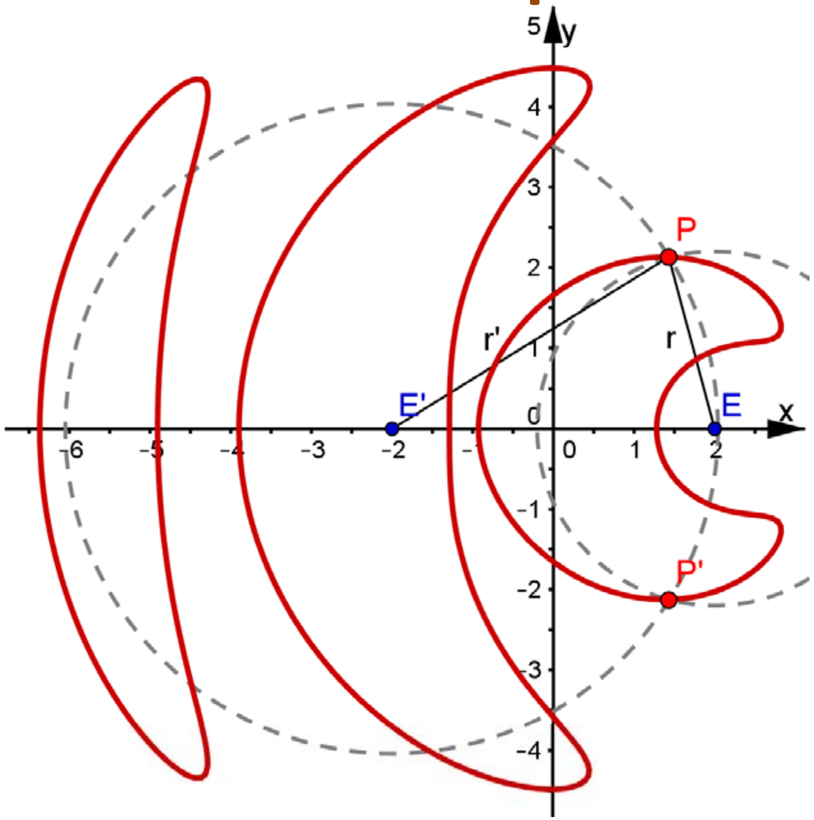
[bipolar-bereich-start-fkt]

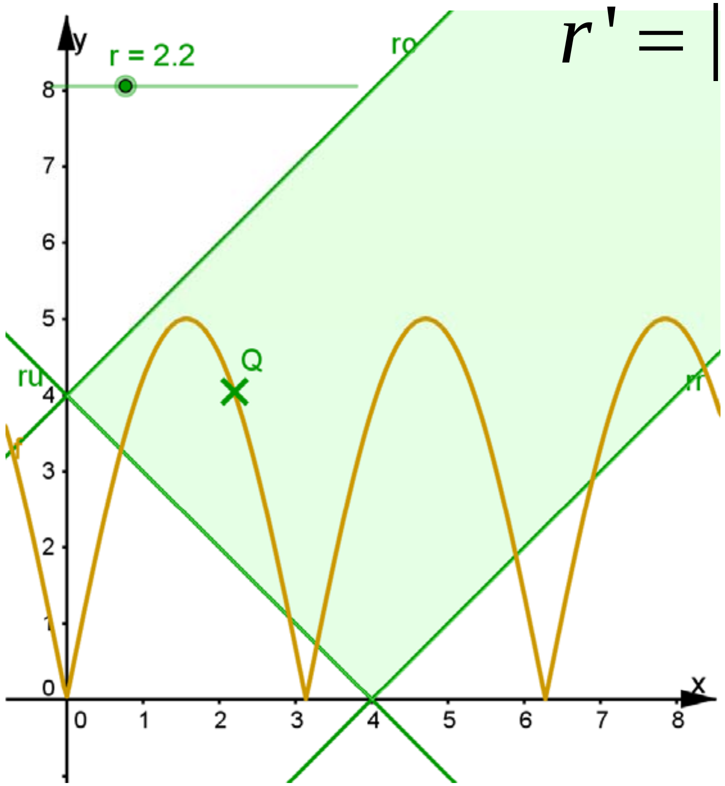


Visualisierung der Dreiecks-bedingung im zweiten Grafikfenster in GeoGebra.
gekoppelte Darstellung

Ein Punkt P habe die Abstände r und r‘ von zwei „Brennpunkten“ E und E‘ im Abstand 2e**. Jede Gleichung** von r und r‘ **definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E‘ eine Dreieck bilden.

Bipolare Sinus-Kurven





$$r' = |\,k \sin(r)\,|$$

Durch die **gekoppelte Darstellung** kann man die Besonderheiten alle verstehen.

bipolar-bereich-start-fkt

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven, alles ist mit allem verwoben

Wie führt man Kurven ein?

Wo sind Freiheiten zum Erkunden?

Was heißt „verstehen“ ?

Wie ermöglicht man Eigentätigkeit?

Welche Bezüge gibt es unter den Kurven?

Welche Werk-zeuge sind hilfreich?

Meine Bücher

2. Aufl. Herbst 2015

Dieses Buch war für „alle“, Vorlesung für alle unsere Erstis, 1500 Studierende aller Fächer.
600 farbige Bilder
Zumeist mit GeoGebra

Mein neues Buch „Kurven erkunden und verstehen“ soll die Lehrerausbildung in Mathematik bereichern. Es soll auch für Lehrer sein, die mehr „nahrhaftes Futter“ für ihre Schüler brauchen.

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

DENN

Diagnose

Die Mathematiklehre leidet an
akuter Magersucht.

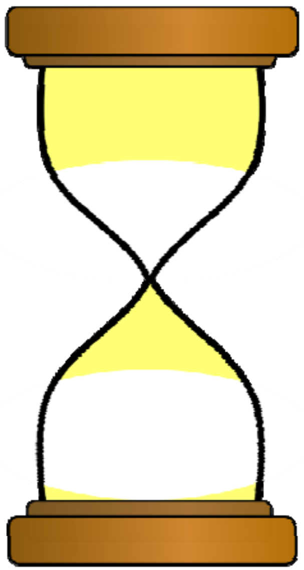
Die Mathematiklehre ist schon so schlapp und kraftlos geworden, dass sie die jungen Menschen nicht durch‘s Studium tragen kann.

Wege zur Heilung

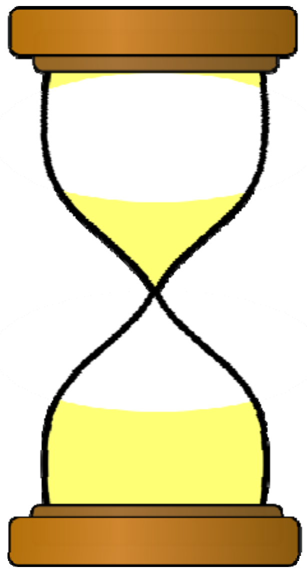
- Verleugnen wir nicht die Kraft der Mathematik, die in der **Verlässlichkeit bewiesener Aussagen** liegt.
- Wie müssen eine **vielfältige** Mathematik ermöglichen,

in der Lernende **selbst** etwas vermuten und behaupten

- und dann lernen, **mathematisch zu argumentieren**.



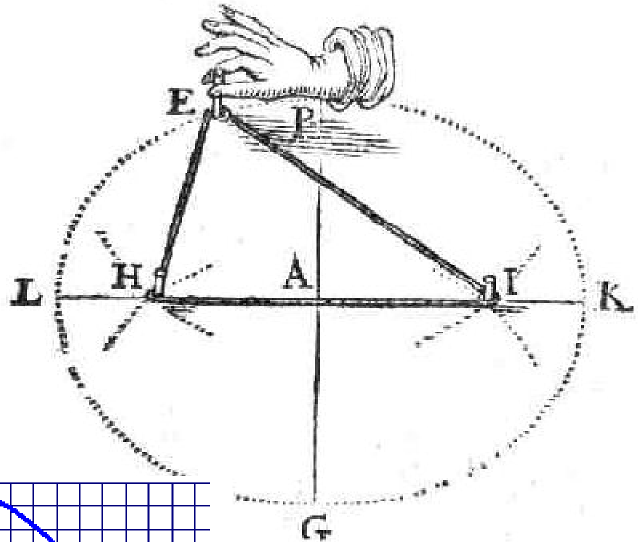
Haben wir Zeit, noch einmal in den Wundersack zu greifen?

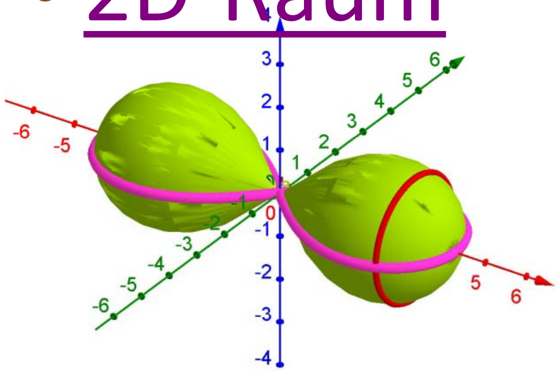


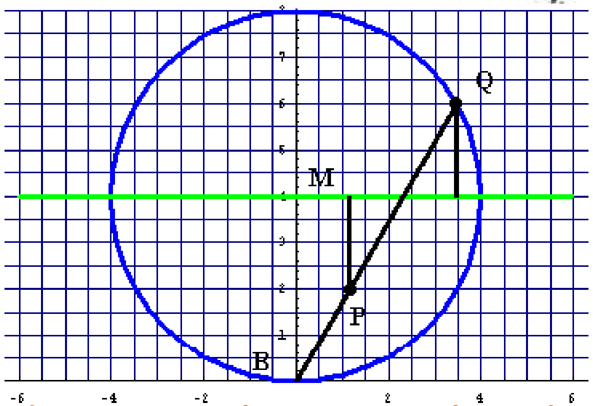
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Weiteres

- weitere Didaktik
- allgemeine Definitionen
- Gelenke und Handlung
- Rasterkonstruktionen
- 2D-Raum







www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Weitere Didaktik

Algebraische Kurven in der Lehre in Schule und Hochschule

eb-Dateien und download Word97

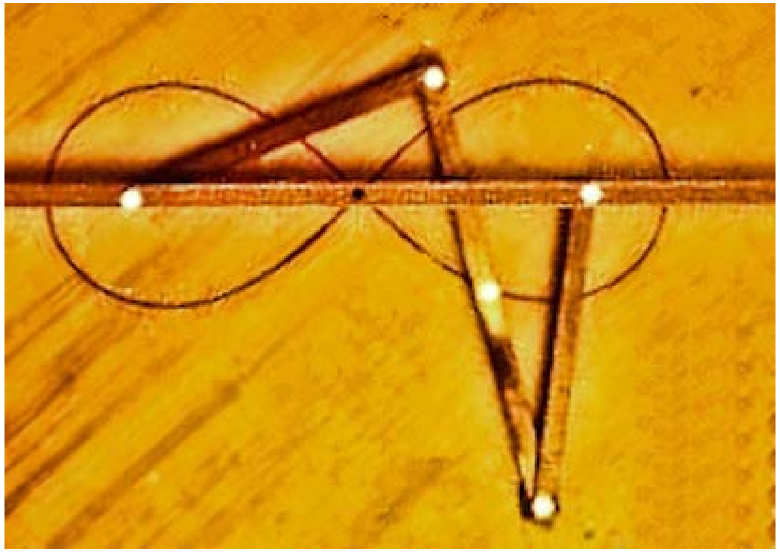
Zusammenfassung	4-Seiten Kurzfassung für die GDM (Gesellschft für Didaktik der Mathematik pdf Auch bei den anderen Vorträgen wird die Intention deutlich.
Allgemeines	Die im Folgenden genannten Altersbereiche sind so gemeint, dass **jede** Lerngruppe mit den handlungsorientierte Elementen anfangen sollte. Bei zunehmender mathematischer Ausbildung kann lediglich jeweils weiter gegangen werden. **Kurven-Heft, Seiten 1 bis 50** und Kurvenheft Seiten 51 bis 83 pdf Auf über 80 Seiten habe ich die meisten edlen pdf-Dateien zusammengefasst. Es ist eine Arbeitserleichterung für das Herunterladen. Alle Seiten sind aber auch thematisch nochmals verlinkt. Insbesonderen gibt es hier im Bereich Kurven aber die Interativen Seiten und z. den Werkzeugen gehörigen Erklärungsseiten-
Klasse 8 oder jünger	Geometrisches Handeln real, auf Papier, Umsetzung in DGS, Erkundung von Ortskurven ist auch ohne den Termbegriff und damit früh möglich. Geeignet sind Hundekurve, Gärtnerellipse, Rutschende Leiter, Parabel, auch Hyperbel, diverse Stangenkonstruktionen, Pascalsche Schnecken. Ausführliches zur Hinführung an der Hundekurve 8Lehre

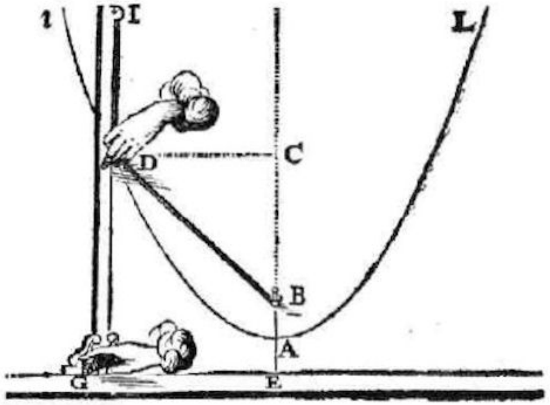
Reichhaltig in Hans Schupp, Heinz Dabrock

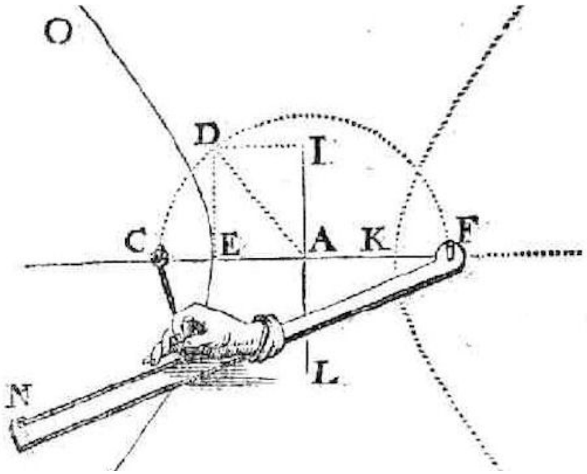
Höhere Kurven 1995, nur Bib.

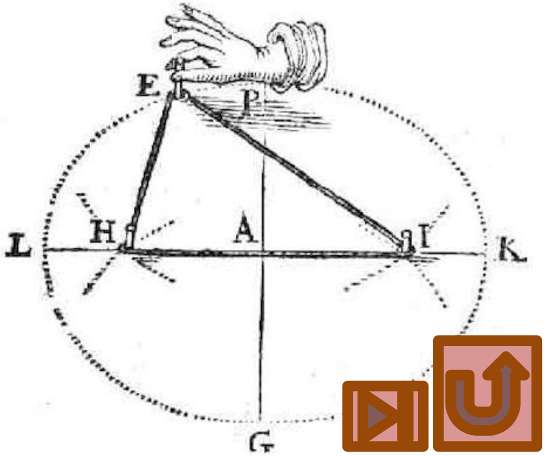
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Starten mit Handeln



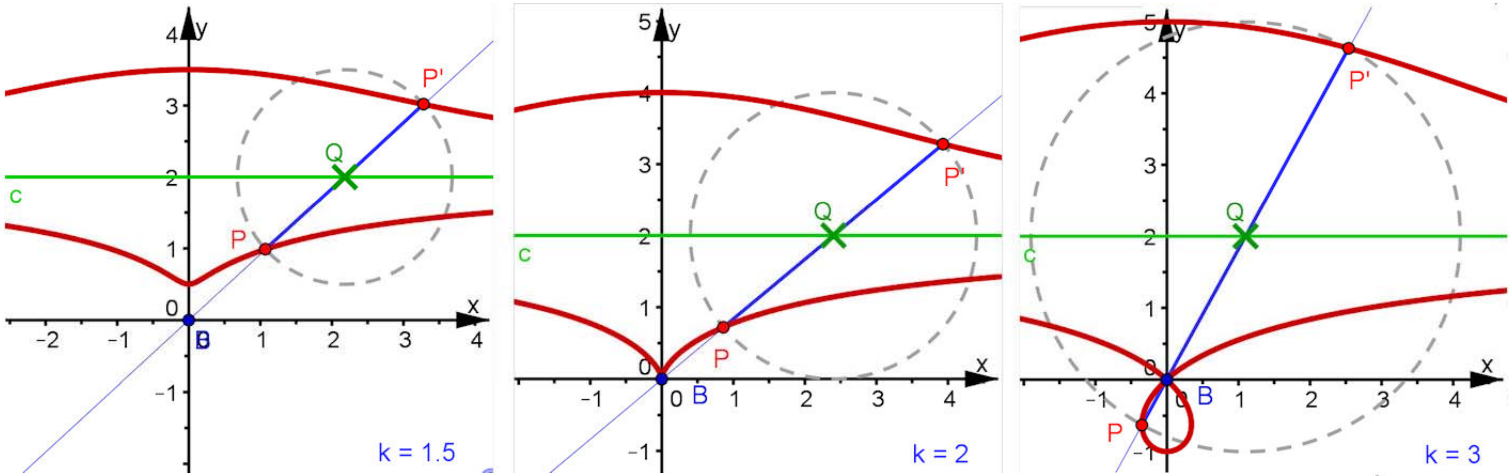




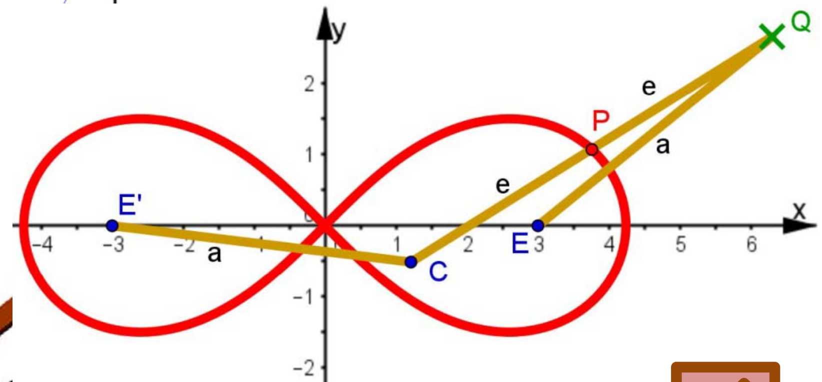


www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

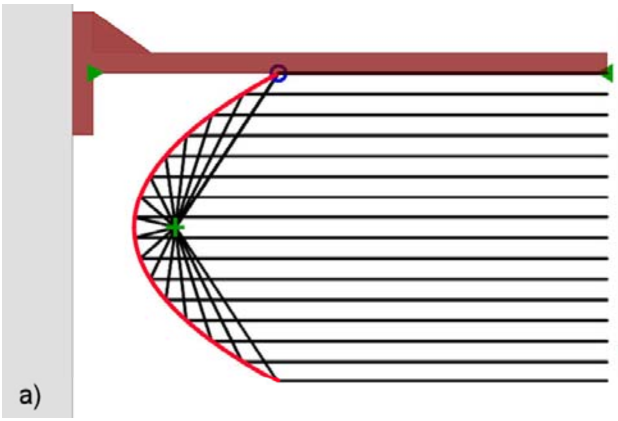
Geometrisch Erfassen und Realisieren



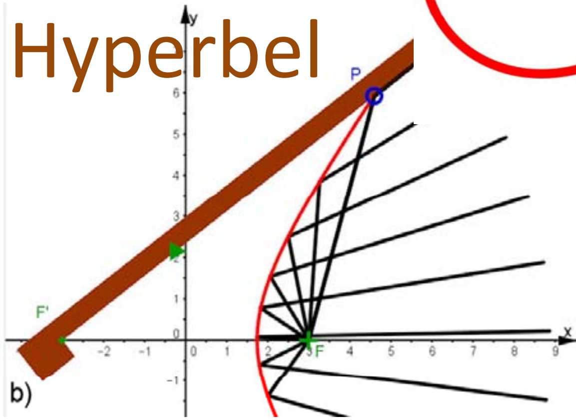
Konchoide des Nikomedes



Lineale mit Faden: Parabel



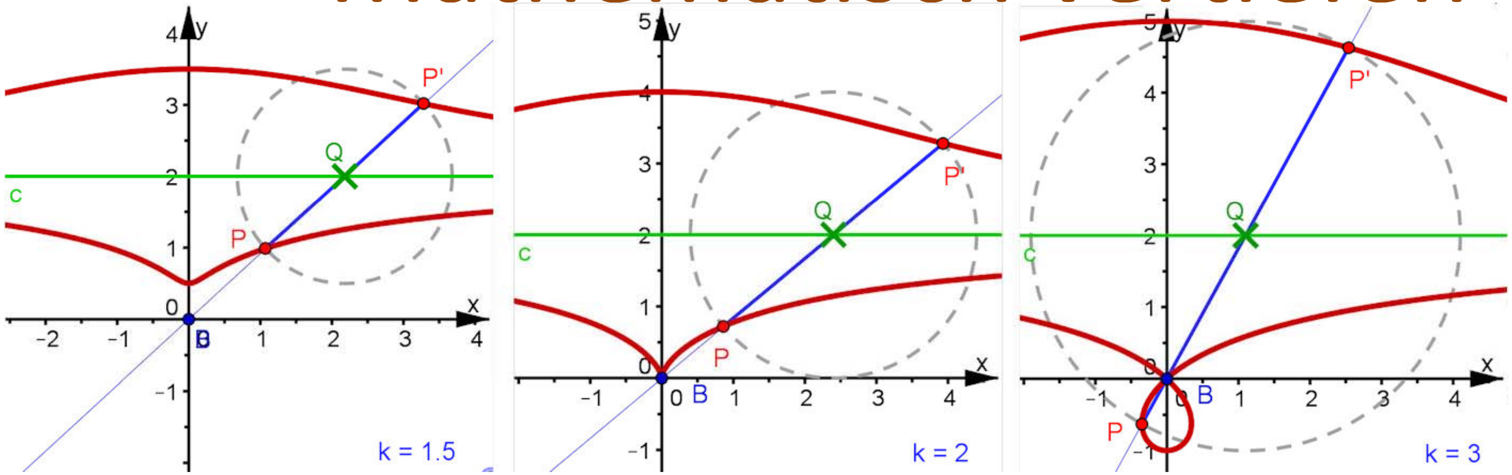
Hyperbel



Bernoulli‘sche Lemniskate

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Mathematisch vertiefen



Für die Jüngsten:

Konchoide des Nikomedes

- Alle Erscheinungsformen finden.
- Überlegen und experimentieren, wovon die Form abhängt.
- Überlegen, ob der „Wanderweg von Q“ geschnitten werden kann.
- Ausprobieren und entscheiden, welche der folgenden Gleichungen stimmen kann:

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2 = k^2y^2$$

Aufgabe 3.1 Visuelles Prüfen von Termumformungen

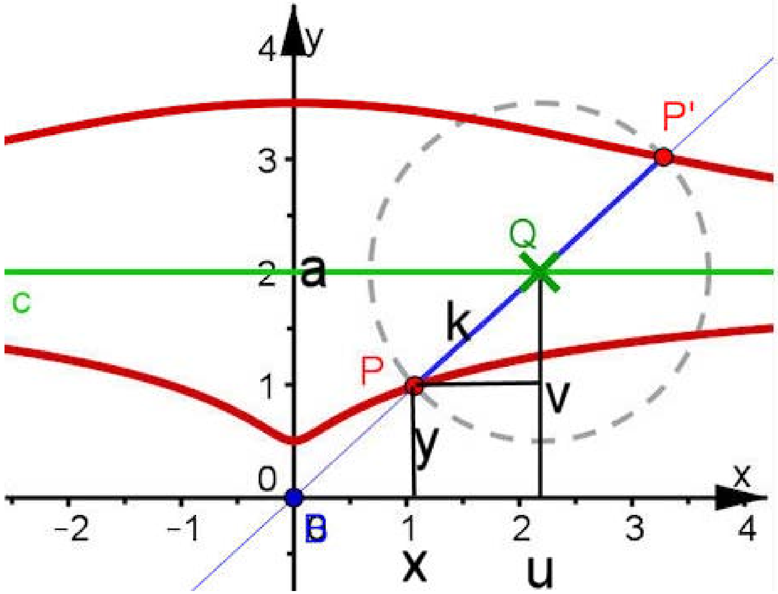
Prüfen Sie durch Zeichnung in GeoGebra und durch Rechnung: Welche der folgenden Gleichungen ist eine richtige Umformung dieser Hundekurven-Gleichung?

a) $(x+y)^2\cdot(y-a)^2 = k^2y^2$ b) $(x^2+y^2)\cdot(y^2-a^2) = k^2y^2$

c) $x^2(y-a)^2 = y^2(k^2-(y-a)^2)$ d) $(k+y-a)(k-y+a)y^2 = (x\cdot(y-a))^2$

e) $x^2y^2 = (y+a)^2(k^2-y^2)$

Mit Pythagoras und Strahlensatz



Konchoide des Nikomedes

Einhaltung von Bezeichnungsstandards

$Q = (u, v)$ **X in grün**

$P = (x, y)$ **in rot**

Kreise zum Übertragen von Abständen grau gestrichelt

Gleichung 1: Weg von Q $v = a, \quad u$ frei

Gleichung 2: Ort 1 von P $(u-x)^2 + (v-y)^2 = k^2$

Gleichung 3: Ort 2 von P

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$$

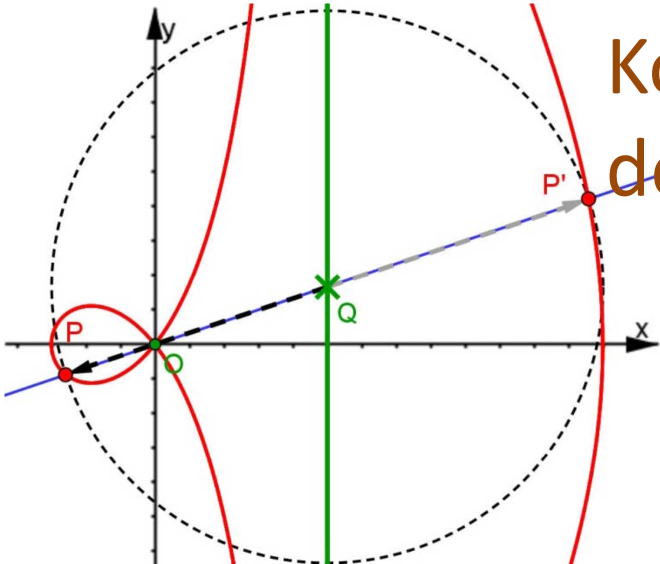
Also: $\left(\frac{a\,x}{y} - x\right)^2 + (a-y)^2 = k^2$

$$(x^2+y^2)\cdot(y-a)^2 = k^2y^2$$

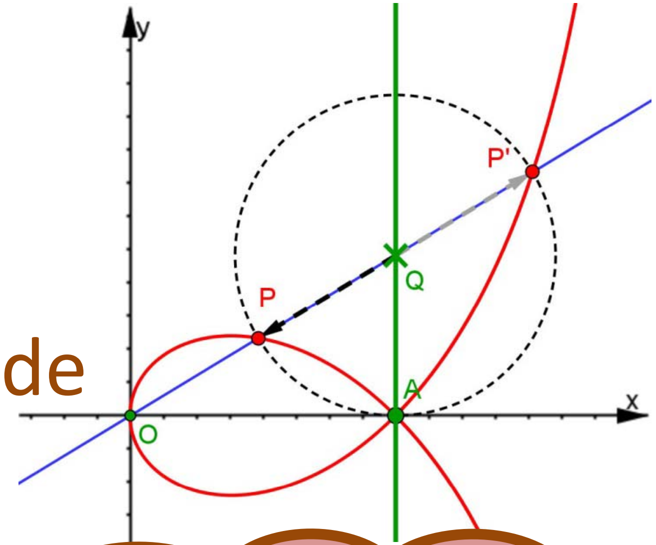
Allgemeine Definitionen

Referenz vor allem das Buch von
E.H. Lockwood
A Book of Curves
1961, nur in Bib. oder antiquarisch

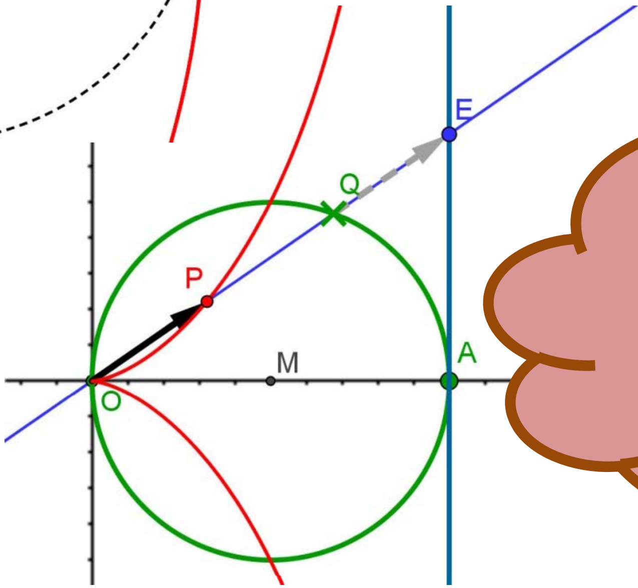
Kurven aus geometrischen Konstruktionen



Konchoide des Nikomedes



Strophoide

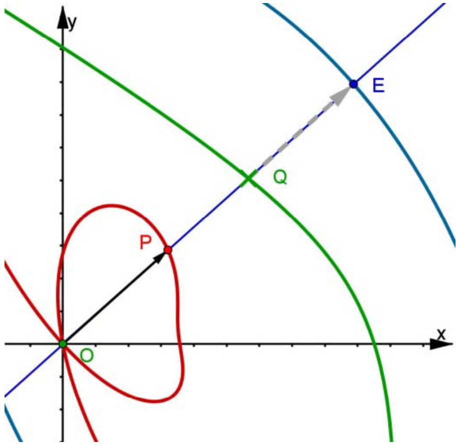


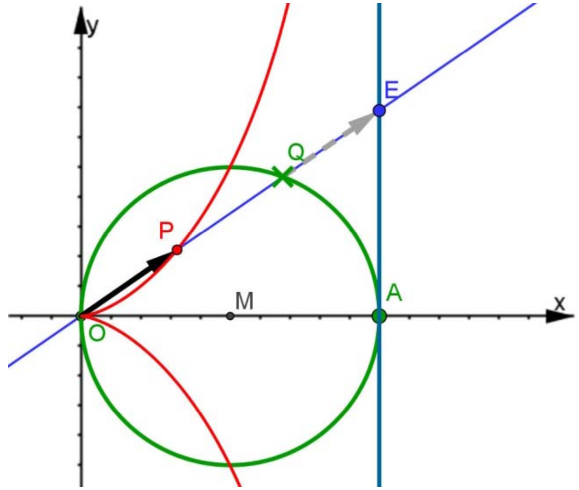
Cissoide

Alles so speziell! Erkunden????

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Cissoide



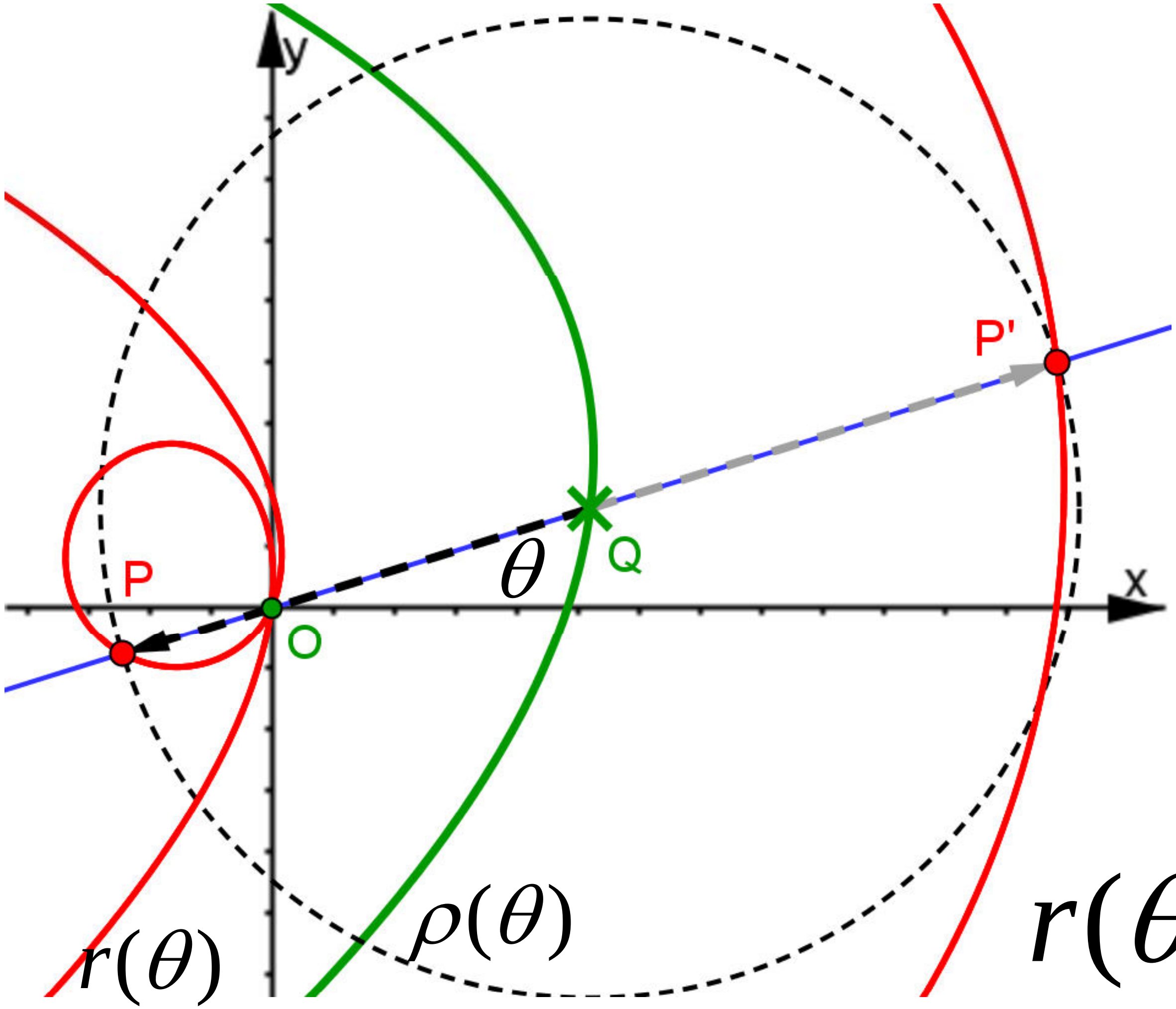


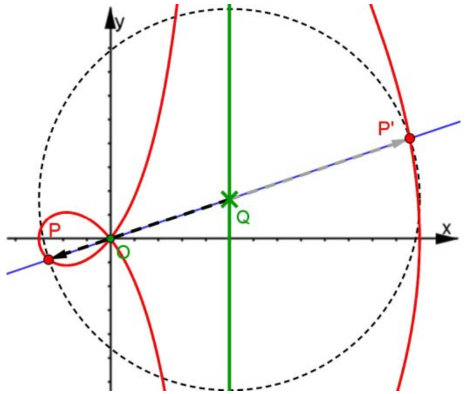
- Allg. Cissoide
  - Konchoide
    - Nikomedes
    - Pascal
      - Kardioide
  - Strophoide Standardform
  - Trisektrix v.Maclaurin
  - Lemniskate
  - Erfindungen

$$r(\theta)=k(\theta)-\rho(\theta)$$

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Allgemeine geometrische Konstruktion der Konchoide

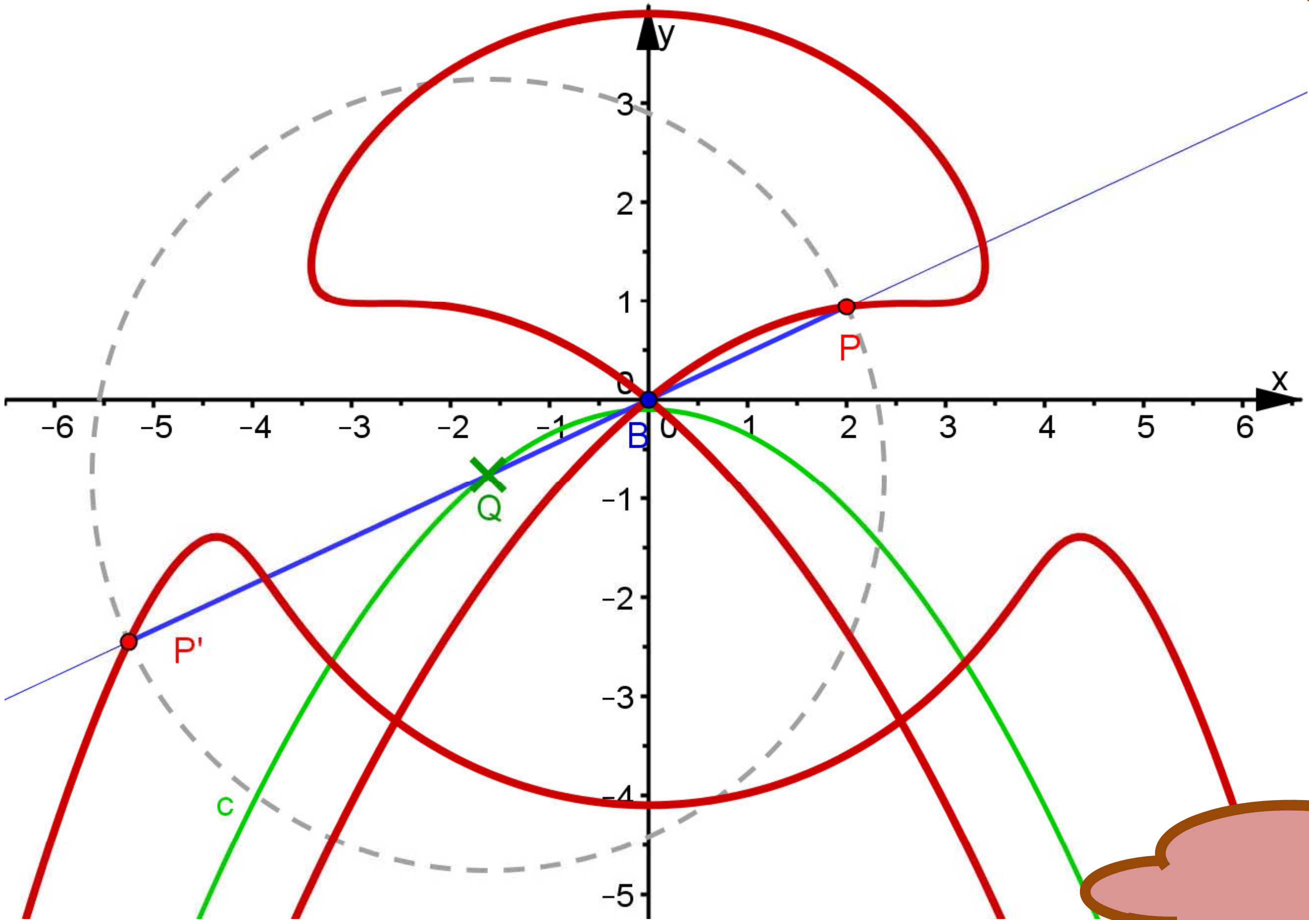




- Wanderkurve für Q beliebig
- Auf Fahrstrahl Leinenlänge k markieren

$$r(\theta) = \rho(\theta) \pm k$$

allgemeinere Konchoiden mit Parabel-Wanderwegen



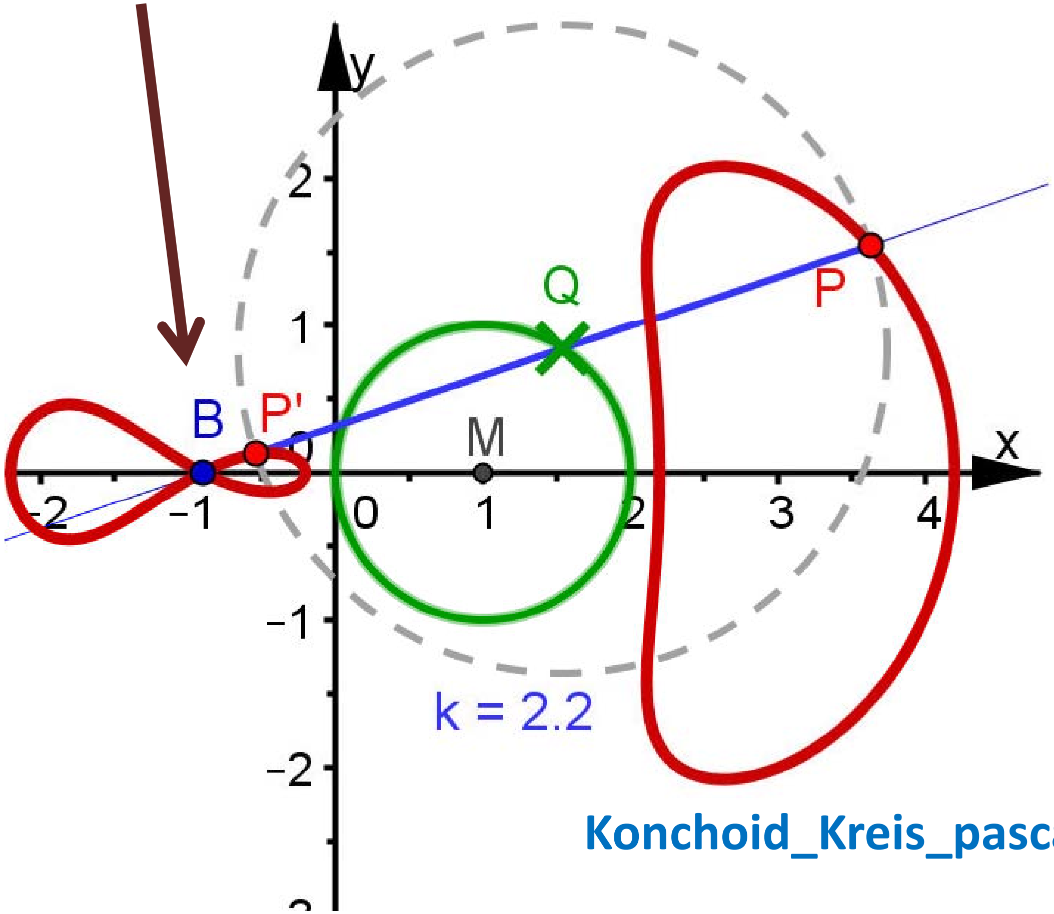
freies Erkunden!

parabel-konch.ggb

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

allgemeinere Konchoiden mit anderen Wanderwegen

den Pol an andere Stelle legen

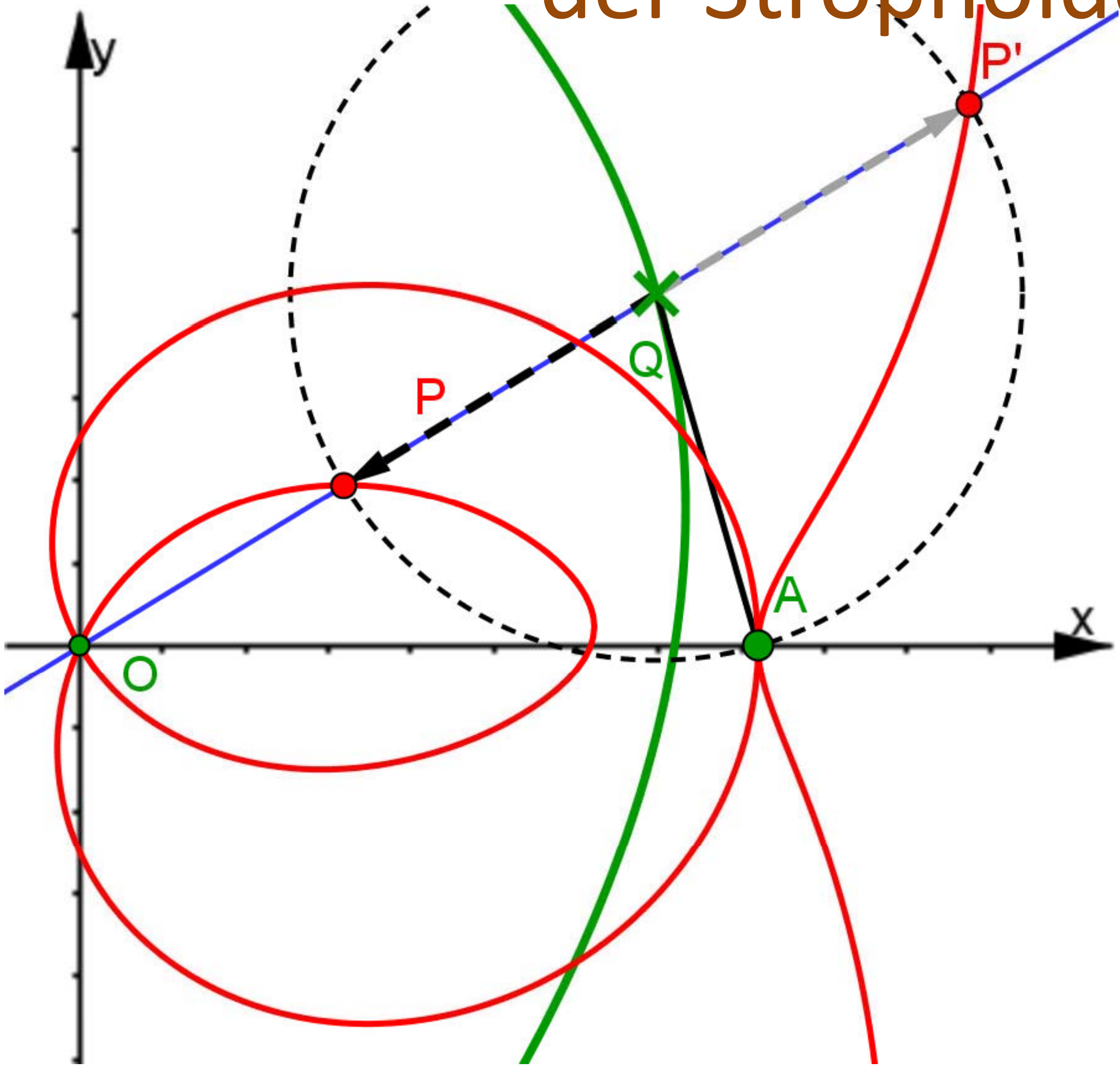


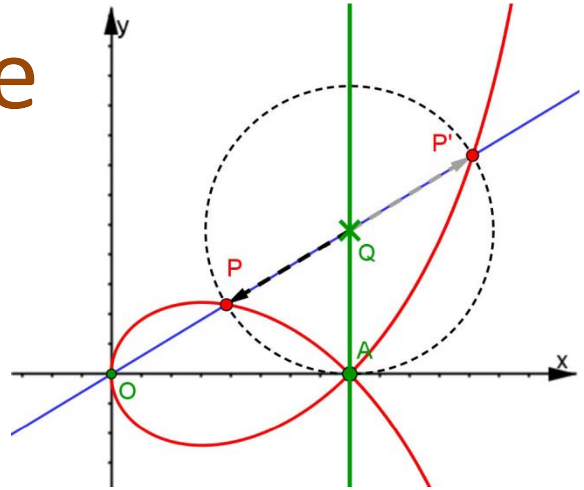
Nicht bloß angucken, sondern nachdenken: Warum hat man alle Fälle betrachtet, wenn B von +2 nach links rückt und man sonst nur k variiert?

Konchoid_Kreis_pascal.ggb

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

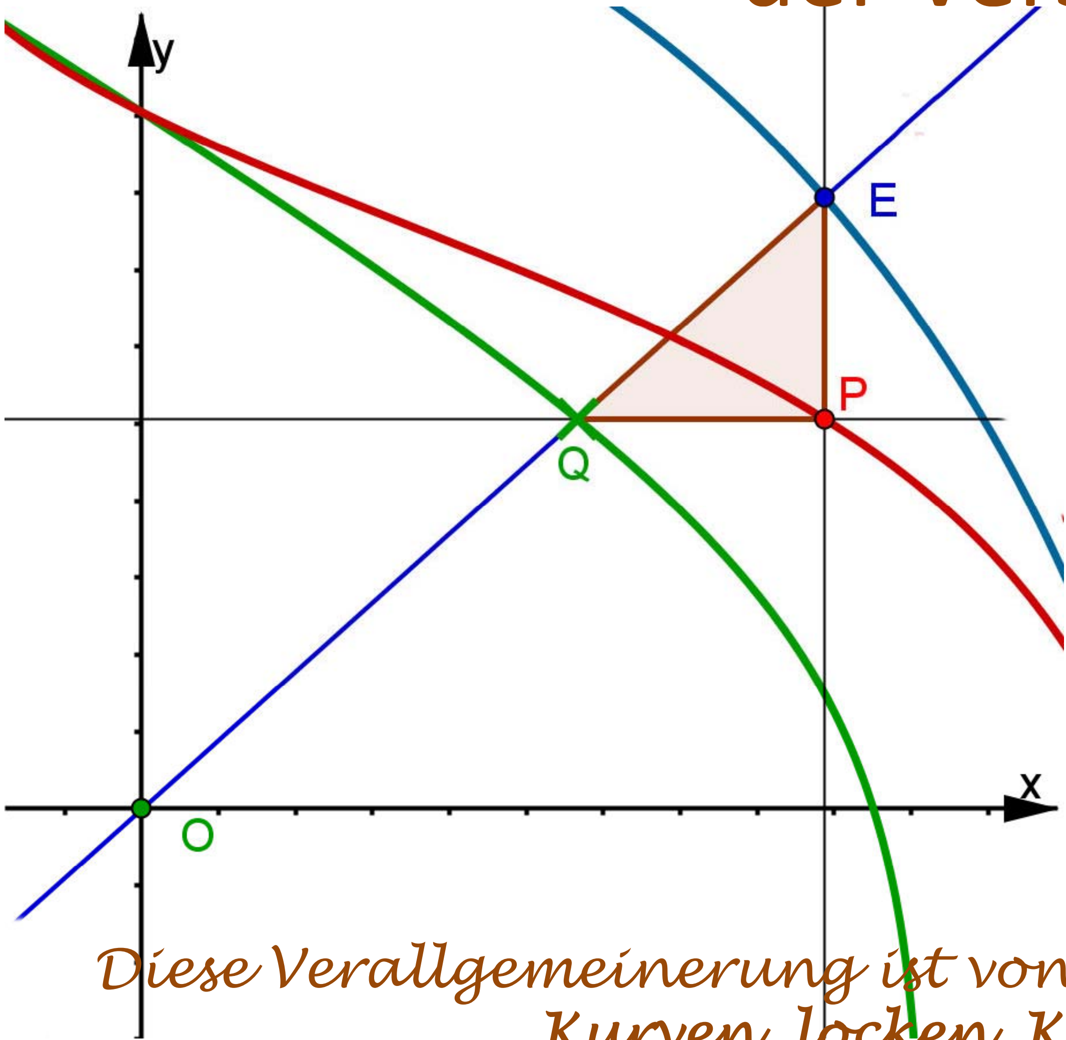
Allgemeine geometrische Konstruktion der Strophoide





- Wanderkurve für Q beliebig
- Kreis[Q,A]
- Auf Fahrstrahl P und P‘

Allgemeine geometrische Konstruktion der Versiera



- Wanderkurve C_1 für Q beliebig
- Zweite Kurve C_2
- Fahrstrahl schneidet C_2 in E
  - P=(x(E),y(Q))

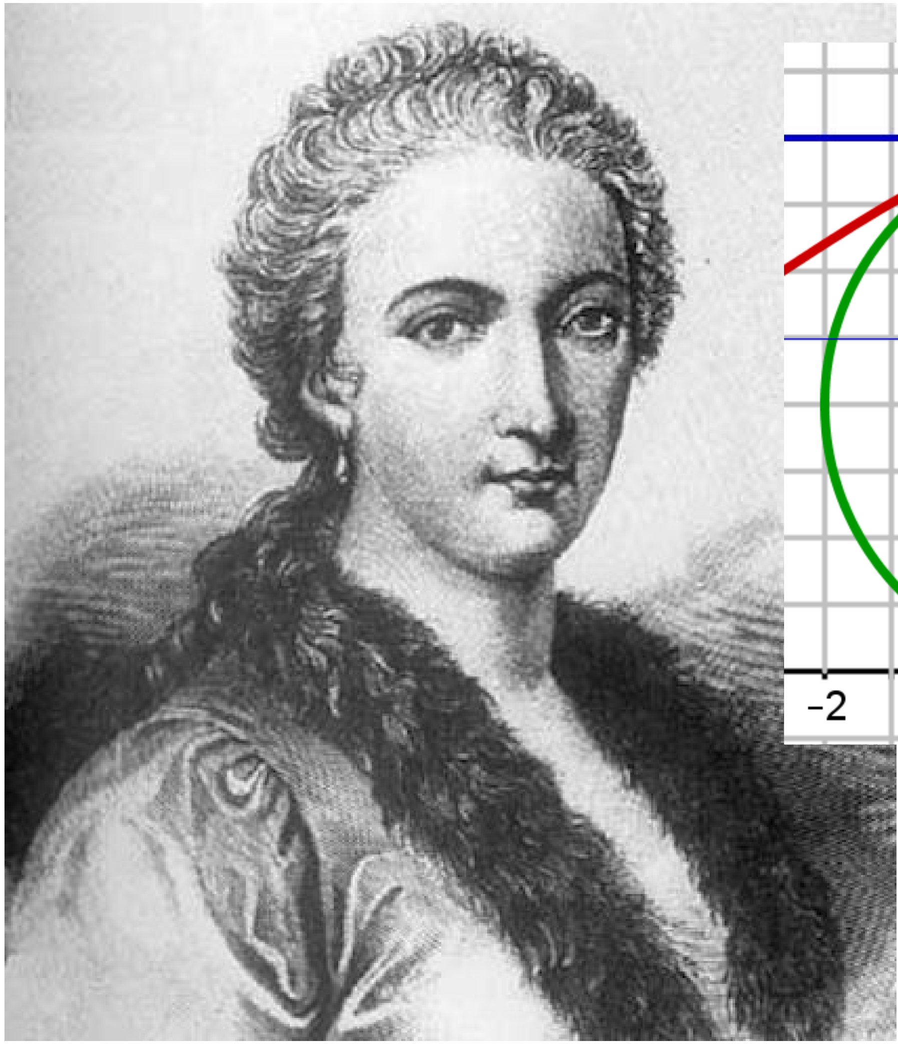
P hat also die Abszisse von E und die Ordinate von Q

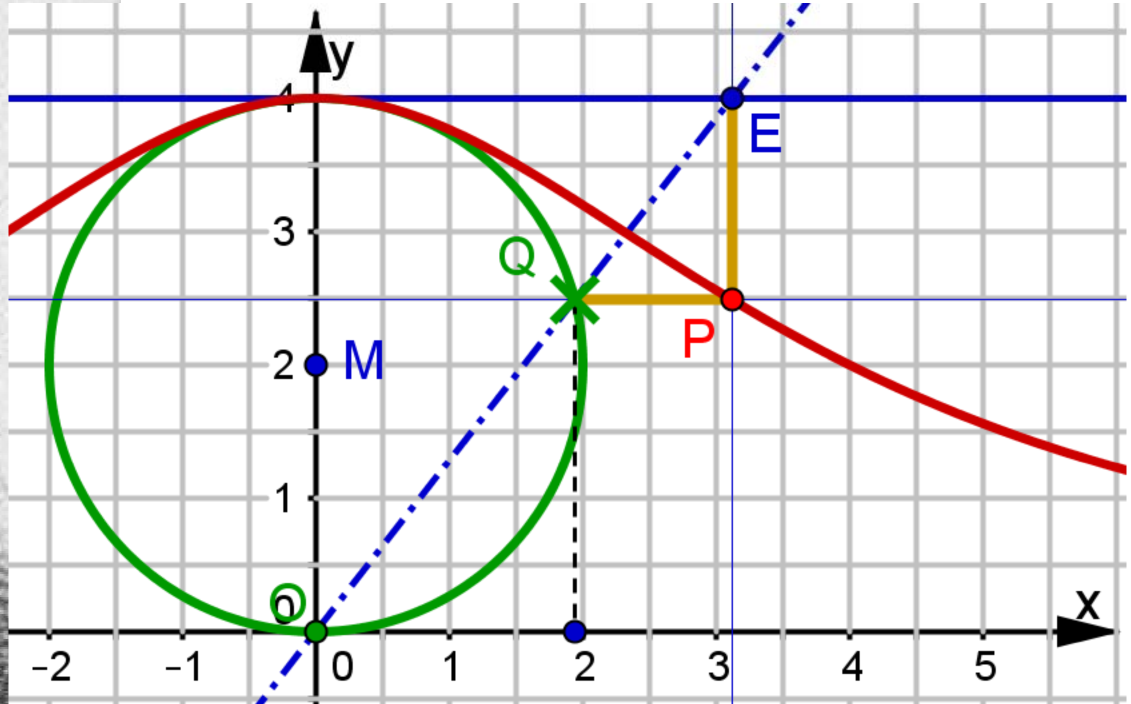
Diese Verallgemeinerung ist von mir, aber so ist es eben: Kurven locken Kreativität

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi 1748





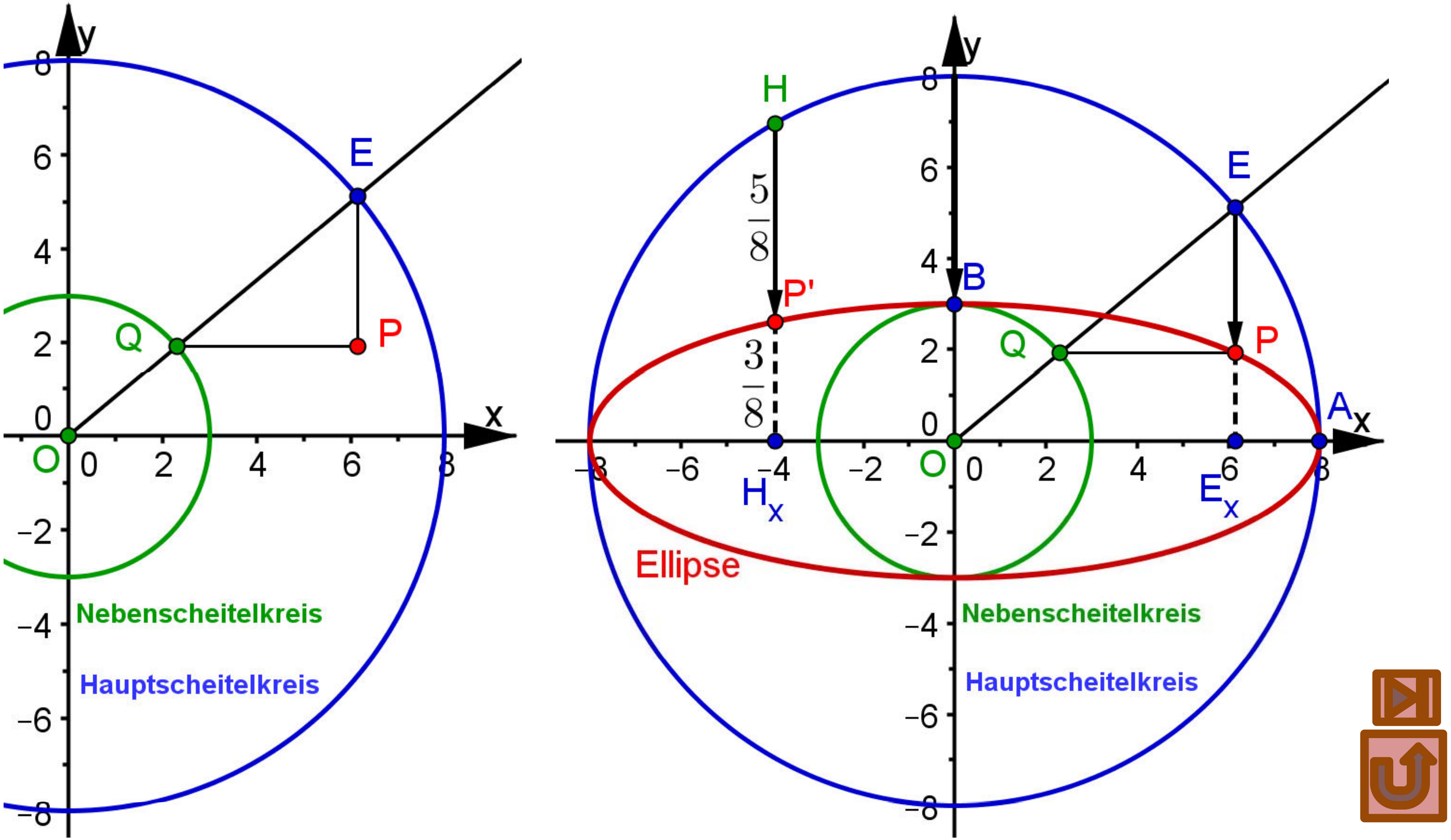
$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Tipp: solche „Rasterkonstruktionen“ sind klausurfähig.

1718-1799

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Ellipse aus der Scheitelkreise-Konstruktion



www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Die allgemeine Versiera verknüpft Geometrie und Analysis

Satz 3.8 **(Gleichungen für die allgemeine Versiera)**

Implizite Gleichungen (möglichst ohne Bruchterme) für einige wichtige Fälle

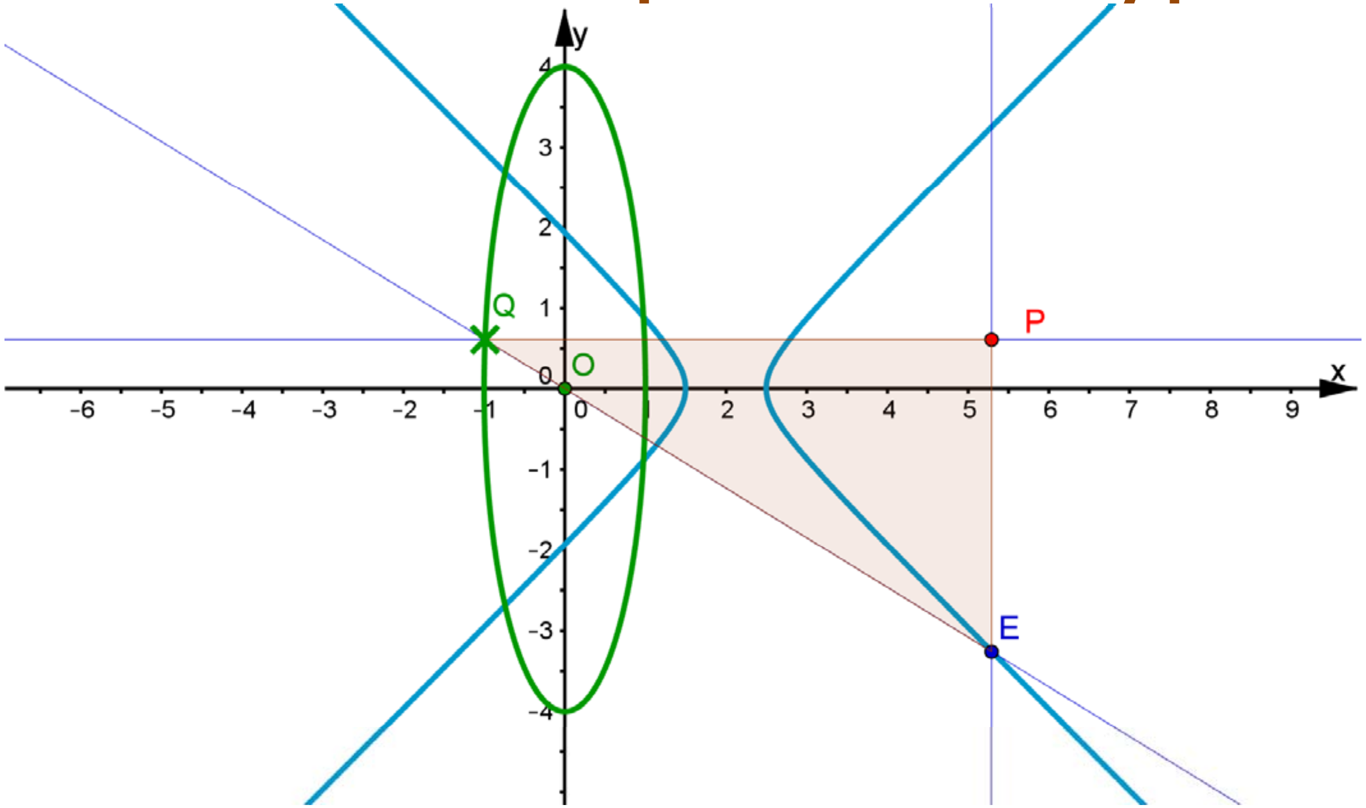
C_1	C_2	*allgemeine Versiera*
$y = f(x)$	$y = k(x)$	$y = f\left(\frac{x\,y}{k(x)}\right)$
Parabel $y = m\,x^2 - a$	$y = k(x)$	$(y+a)k(x)^2 = mx^2y^2$
$F(x,y) = 0$	$y = k(x)$	$F\left(\frac{x\,y}{k(x)}, y\right) = 0$
Kreis $x^2 + (y-a)^2 = a^2$	$y = k(x)$	$x^2y = k(x)^2(2a - y)$
$F(x,y) = 0$	$K(x,y) = 0$	*Aus* $F(u,y)$, $K(x,t)$, $xy = ut$ *u und t eliminieren*

Vieles geht in GeoGebra-CAS, TI Nspire CAS o.Ä.

Elimination geht (für jeden) mit Wolfram-Alpha

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



versiera-elli-hyp.ggb

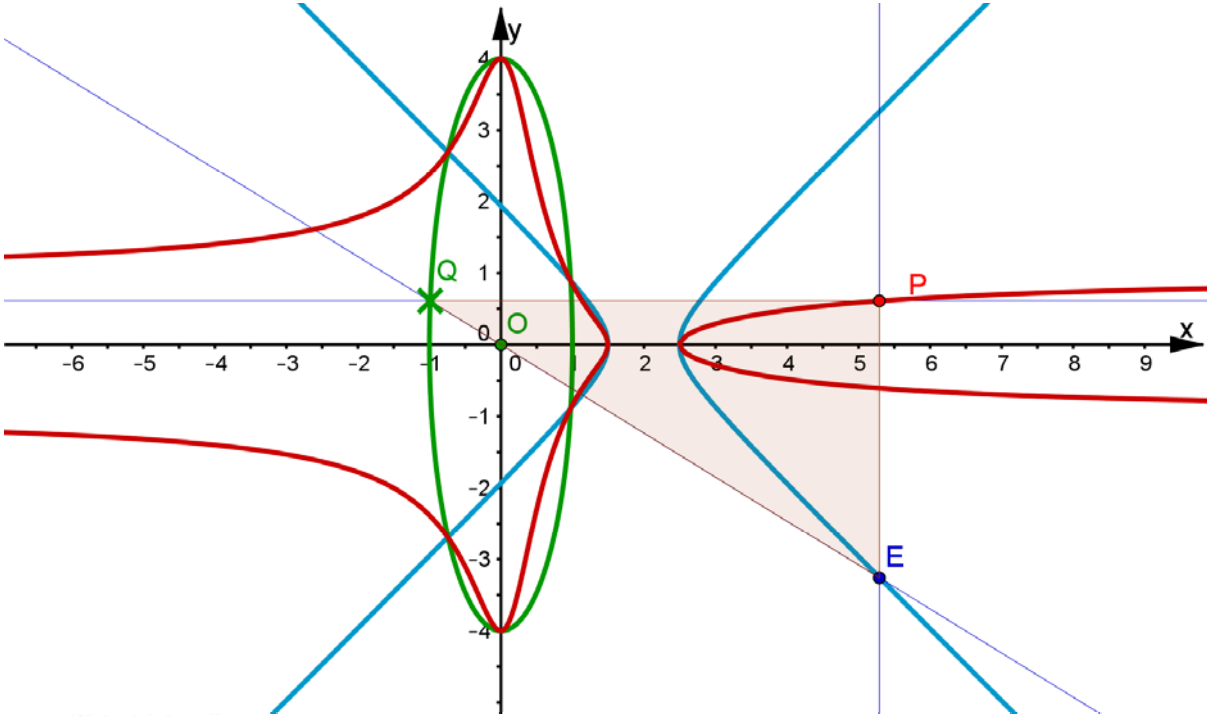
WolframAlpha computational knowledge engine

Eliminate[{u^2/a^2+ y^2/b^2==1,(x-2a)^2-t^2==s^2, x y == u t},{u,t}]

Examples Random

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Versiera mit Ellipse und Hyperbel



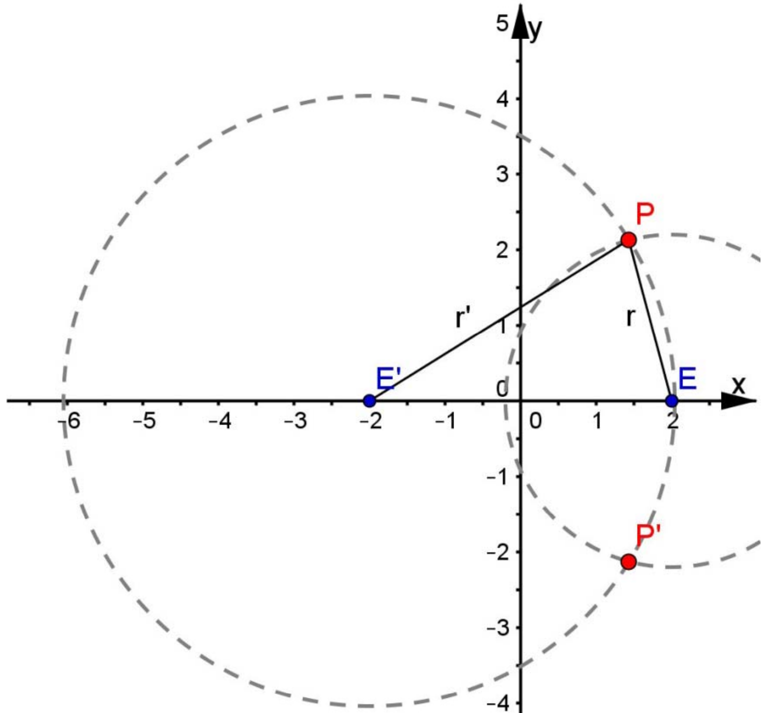
Result:

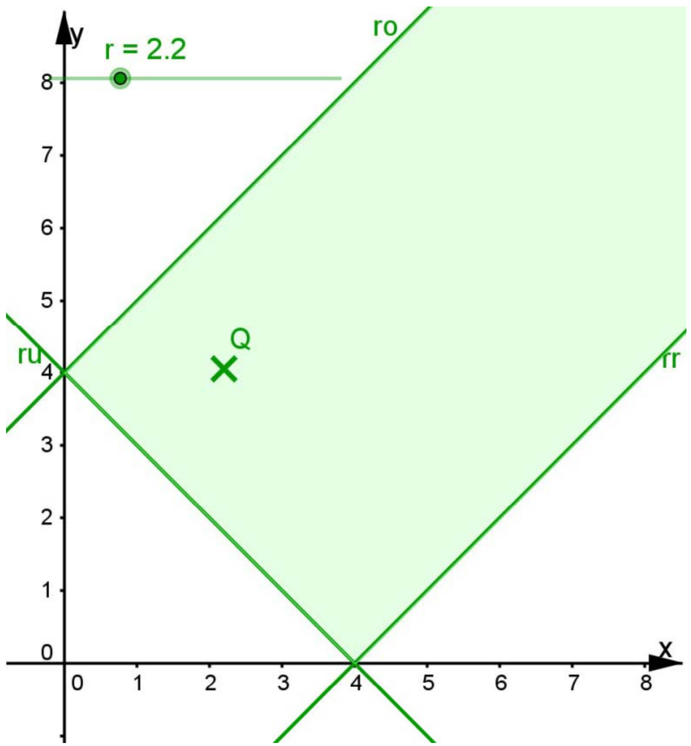
$$s^2\left(y^2-b^2\right)=\frac{b^2\,x^2\,y^2}{a^2}-4\,a^2\,b^2+4\,a^2\,y^2+4\,a\,b^2\,x-4\,a\,x\,y^2-b^2\,x^2+x^2\,y^2\bigwedge$$
$$a\neq 0\bigwedge b\neq 0$$

[versiera-elli-hyp.ggb]

s^2 (y^2 - b^2) =
(b^2 x^2 y^2)/a^2 - 4 a^2 b^2 + 4 a^2 y^2 +
4 a b^2 x - 4 a x y^2 - b^2 x^2 + x^2 y^2 && a != 0 && b != 0

Allgemeine bipolare Kurven



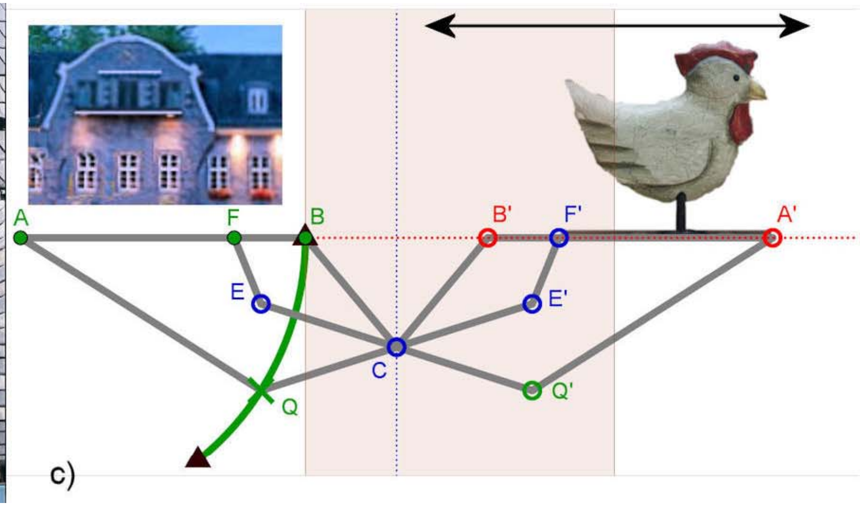


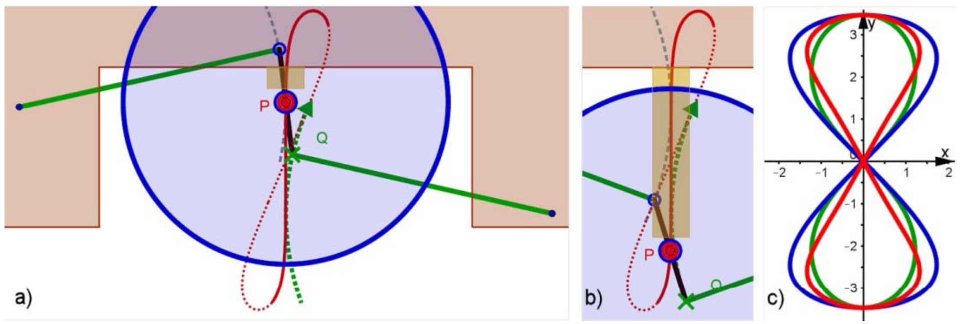
Visualisierung der Dreiecks-bedingung im zweiten Grafikfenster in GeoGebra. **gekoppelte Darstellung**

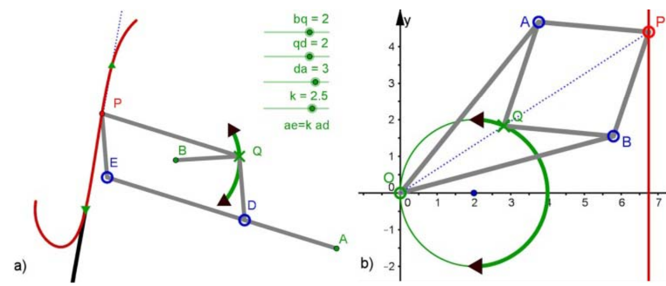
bipolar-bereich-start-fkt

Ein Punkt P habe die Abstände r und r‘ von zwei „Brennpunkten“ E und E‘ im Abstand 2e. **Jede Gleichung** von r und r‘ **definiert eine bipolare Kurve** als Menge aller Punkte, die sowohl die Gleichung erfüllen, als auch mit E und E‘ eine Dreieck bilden.

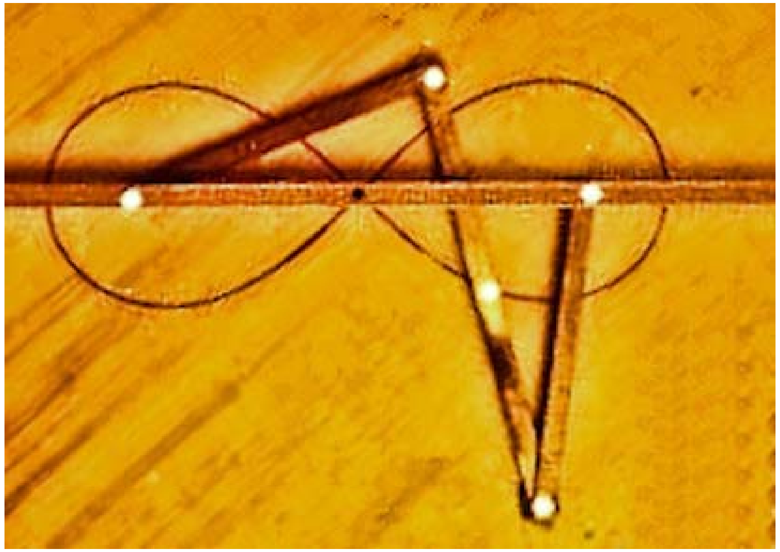
Gelenke

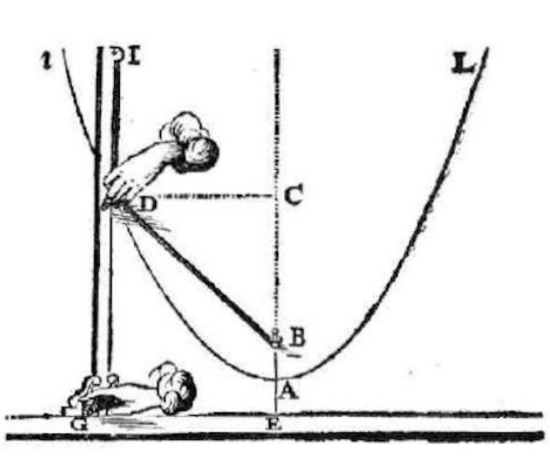

A
F
B
B'
F'
A'
E
E'
C
Q
Q'
c)

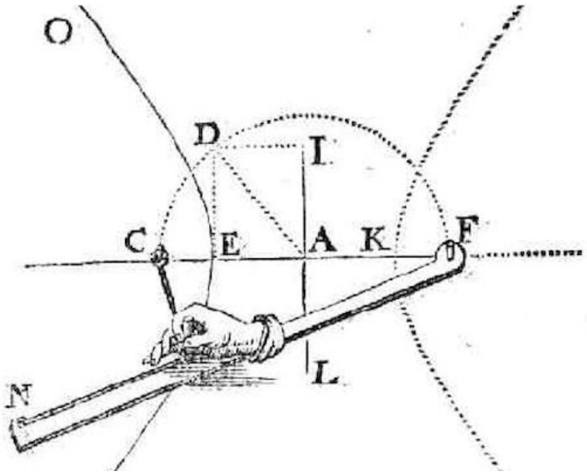

P
Q
a)
P
Q
b)
c)
x
y

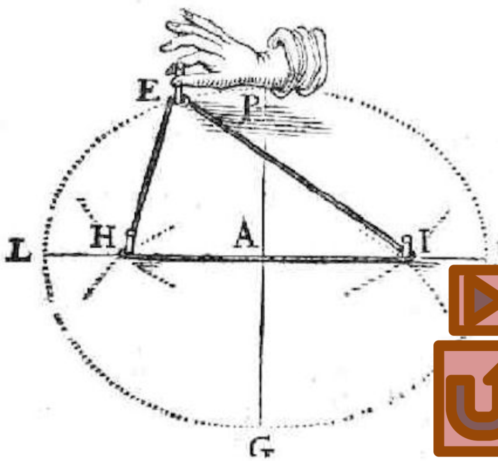

bq = 2
qd = 2
da = 3
k = 2.5
ae=k ad
P
E
B
Q
D
A
a)
A
P
Q'
B
O
b)

Starten mit Handeln



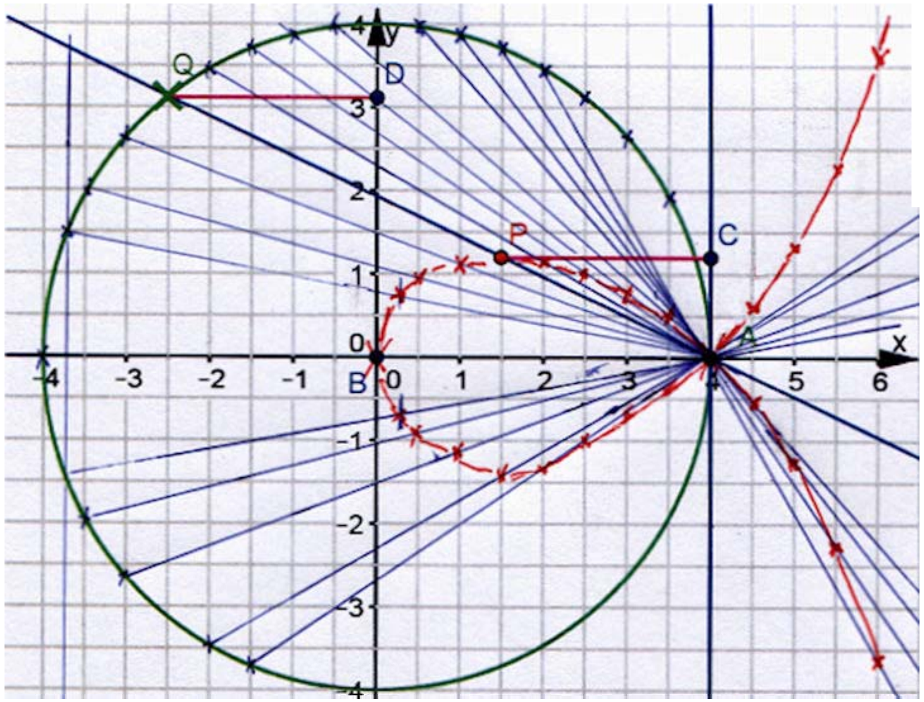


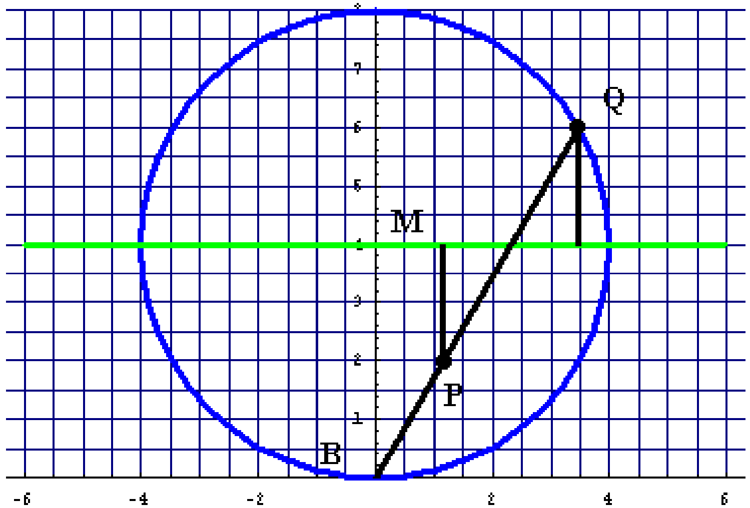


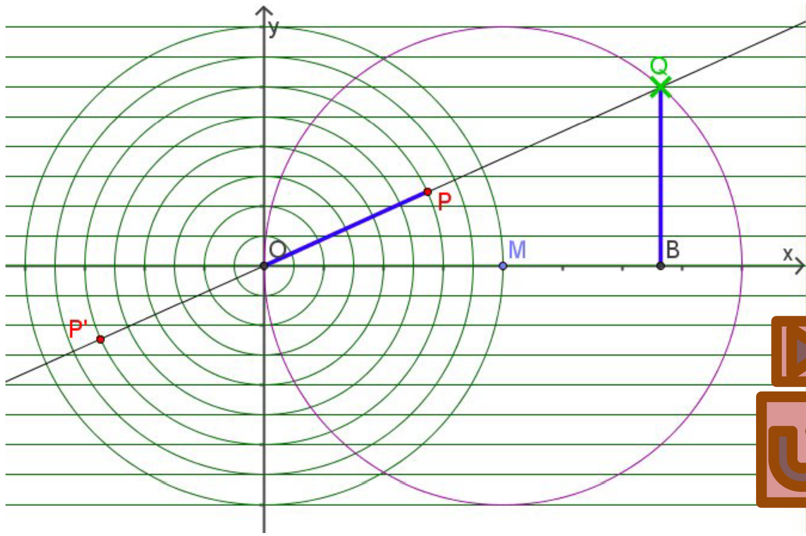


www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Raster-Konstruk-tionen



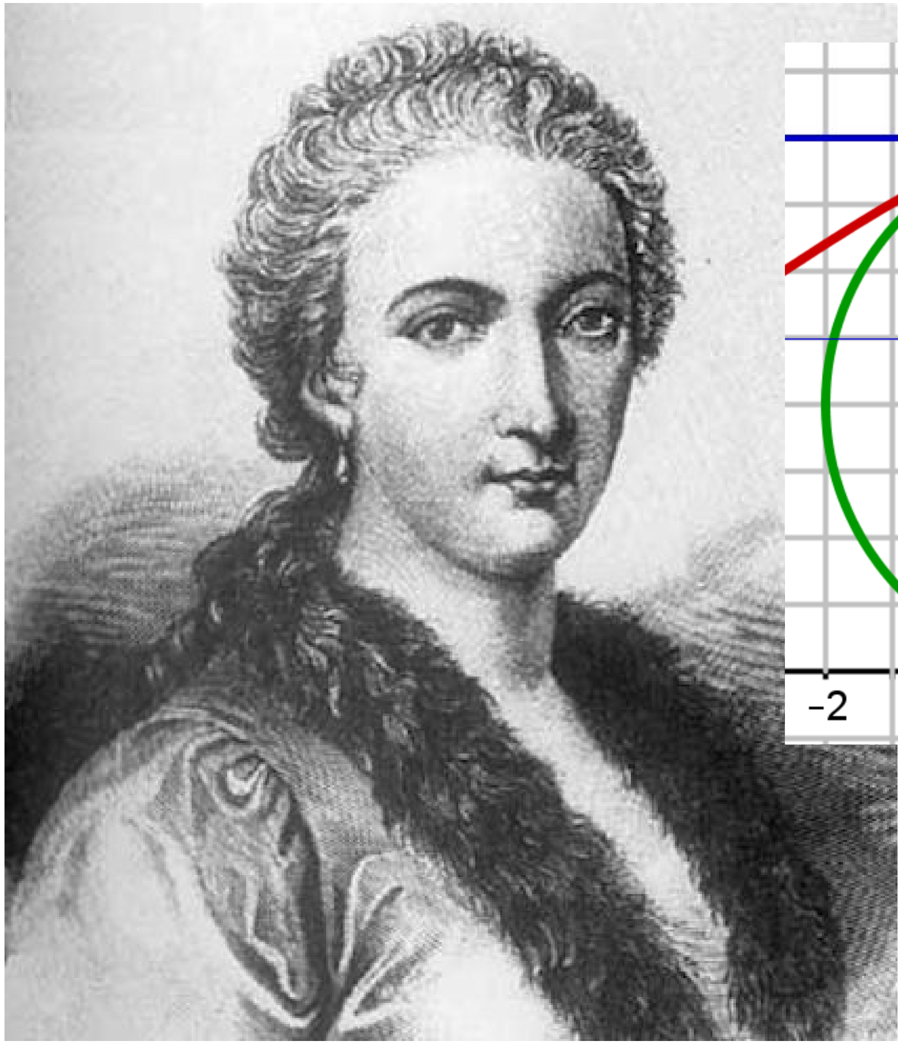




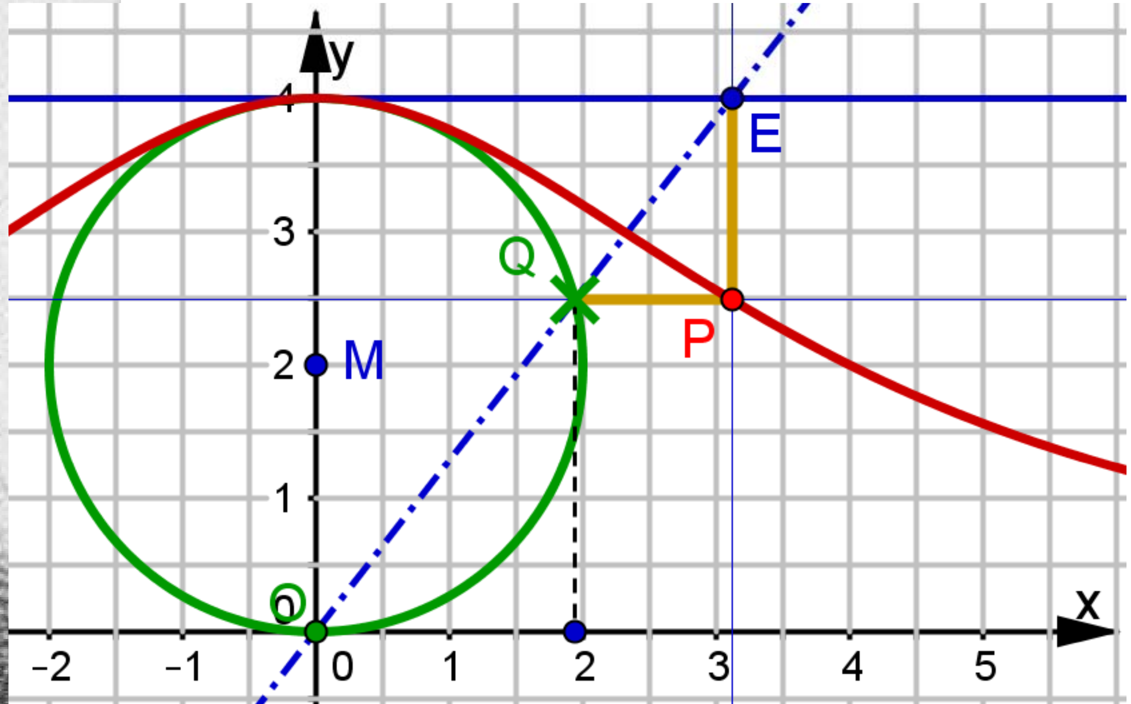
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurven aus geometrischen Konstruktionen

Versiera der Maria Agnesi 1748



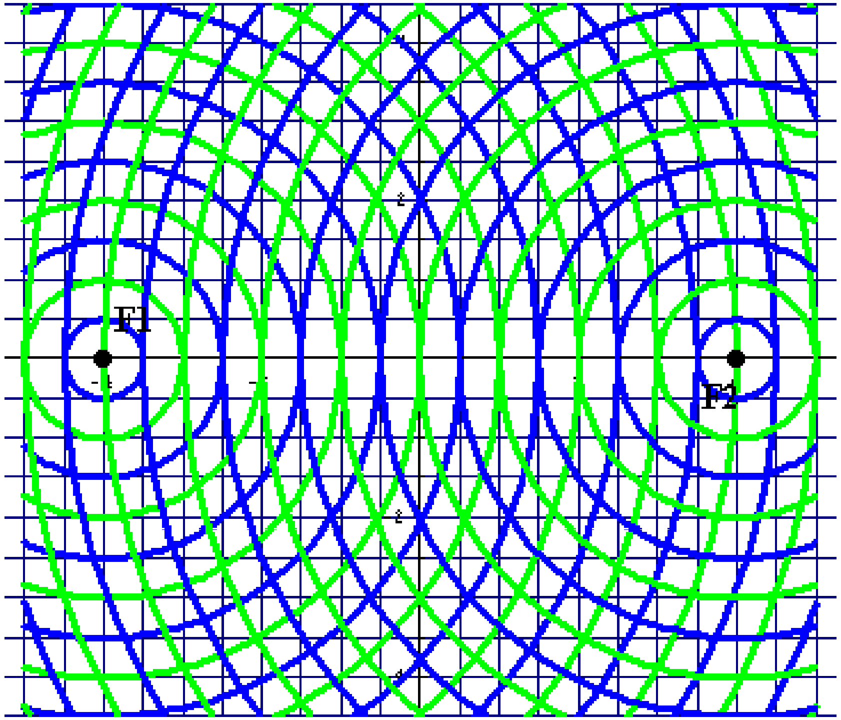
1718-1799



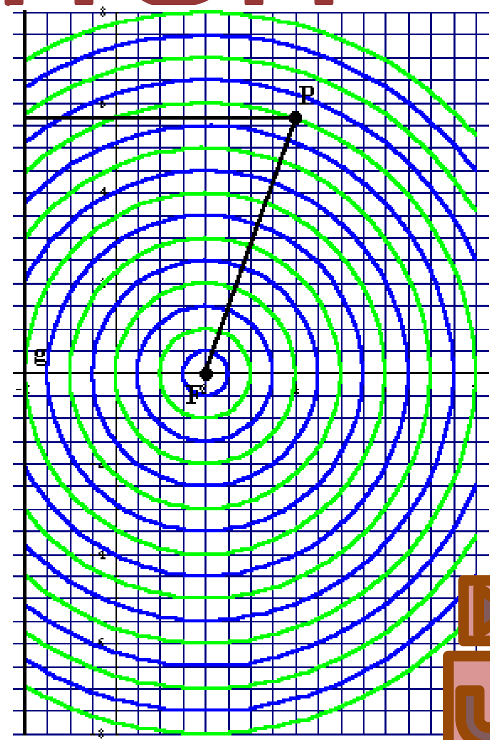
$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

Tipp: solche „Rasterkonstruktionen“ sind klausurfähig.

Raster-Konstruktionen

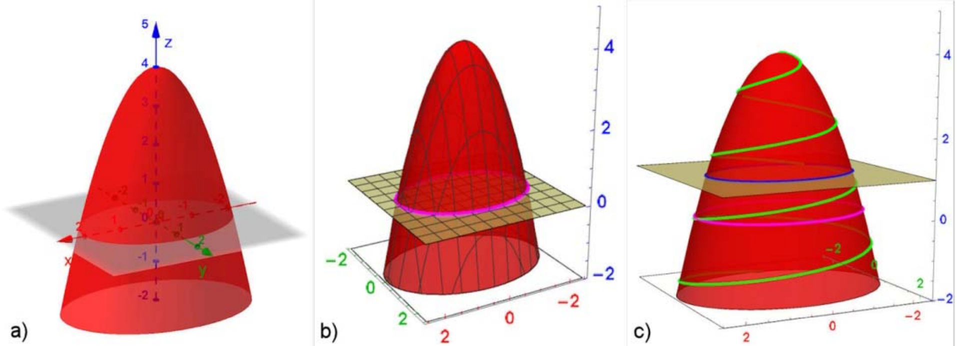


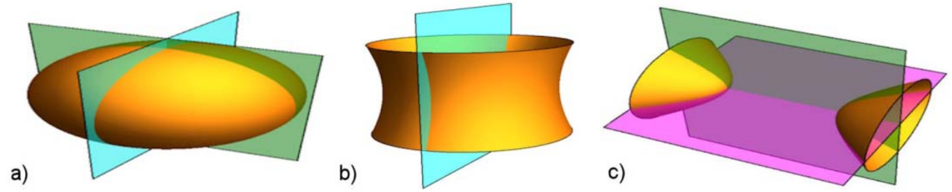
Kegel-schitte

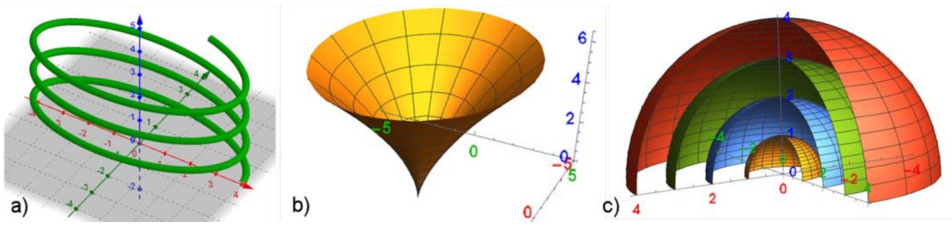


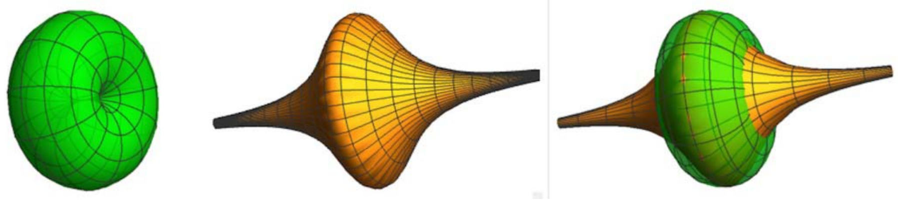
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

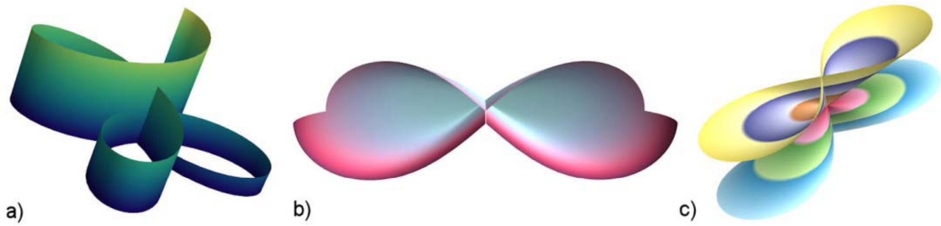
3D-Raum







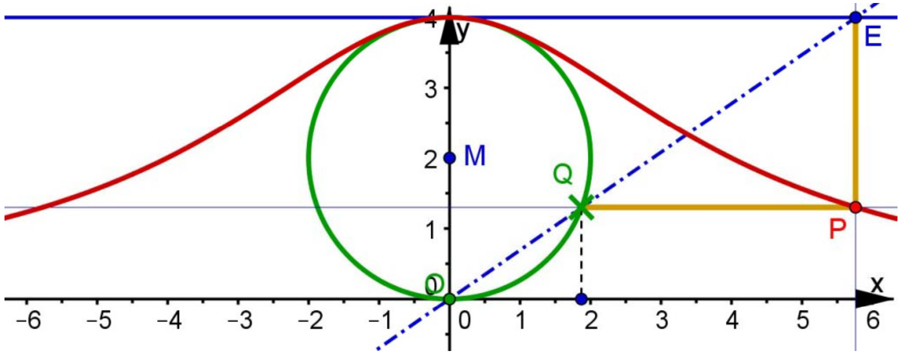


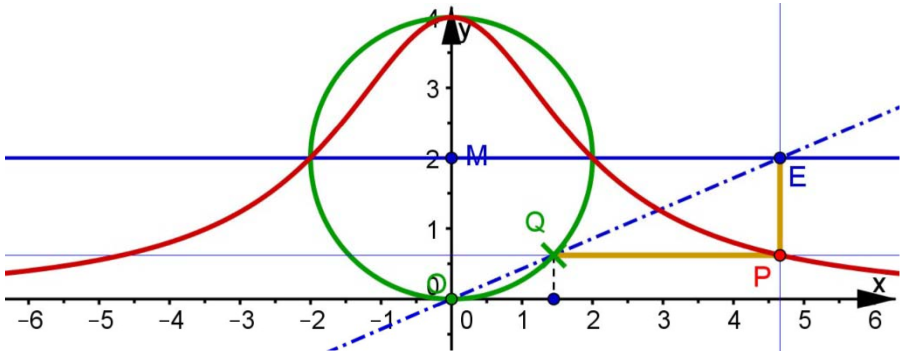


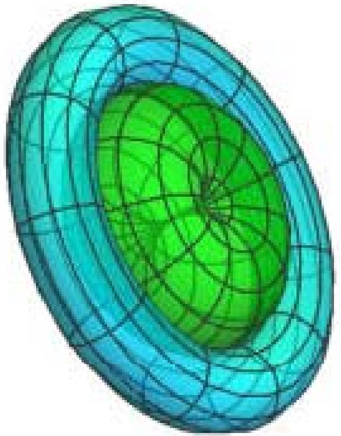
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

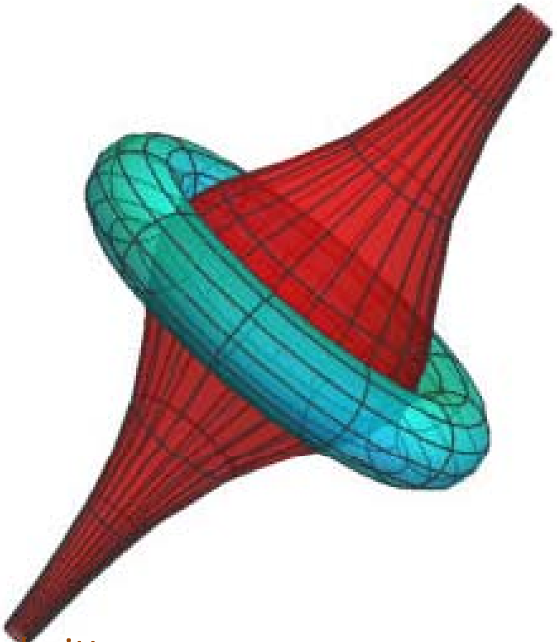
Kurven aus geometrischen Konstruktionen

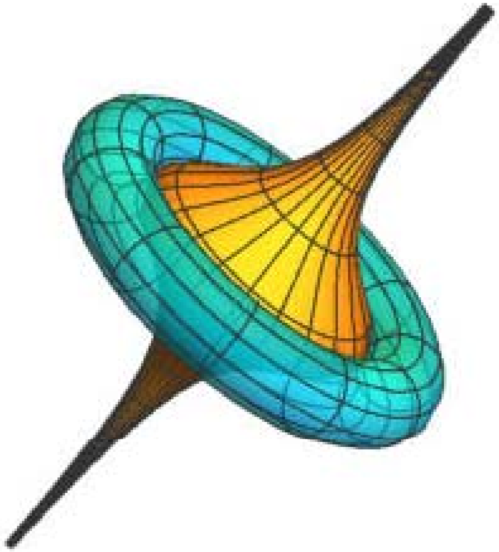
Versiera der Maria Agnesi







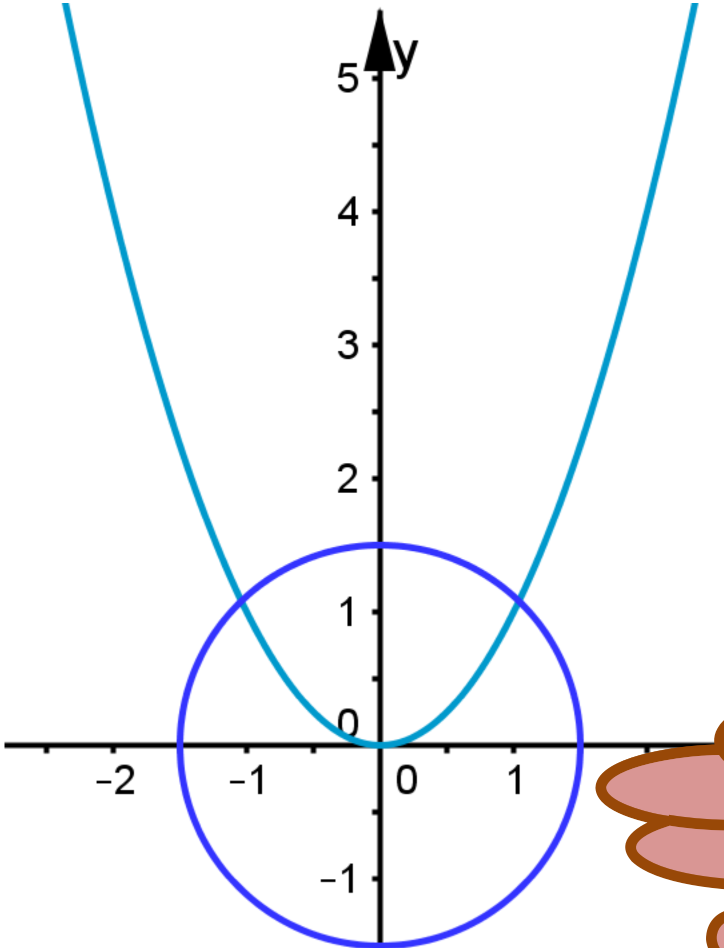




Auch das noch:
Querschnitt zeigt den Goldenen Schnitt

www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D



$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

Der Graph der Produktkurve ist die Vereinigung der Punkte der Faktorkurven.

$$(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=h$$

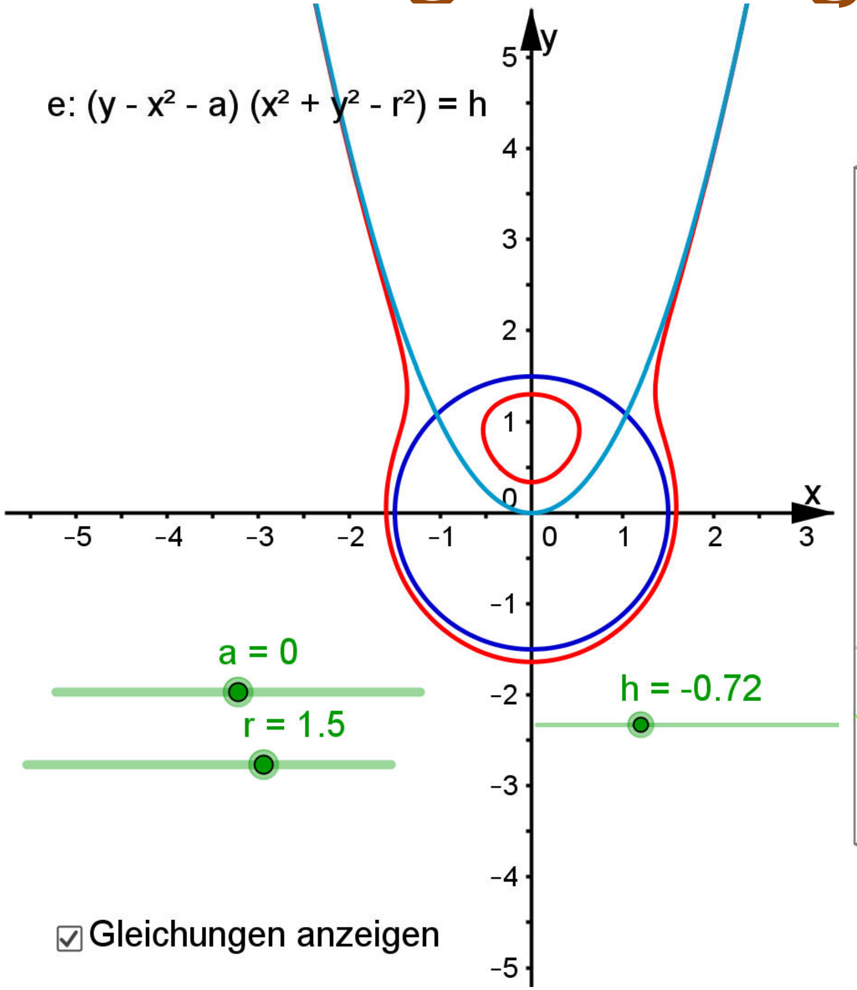
Wenn hier keine 0 steht?

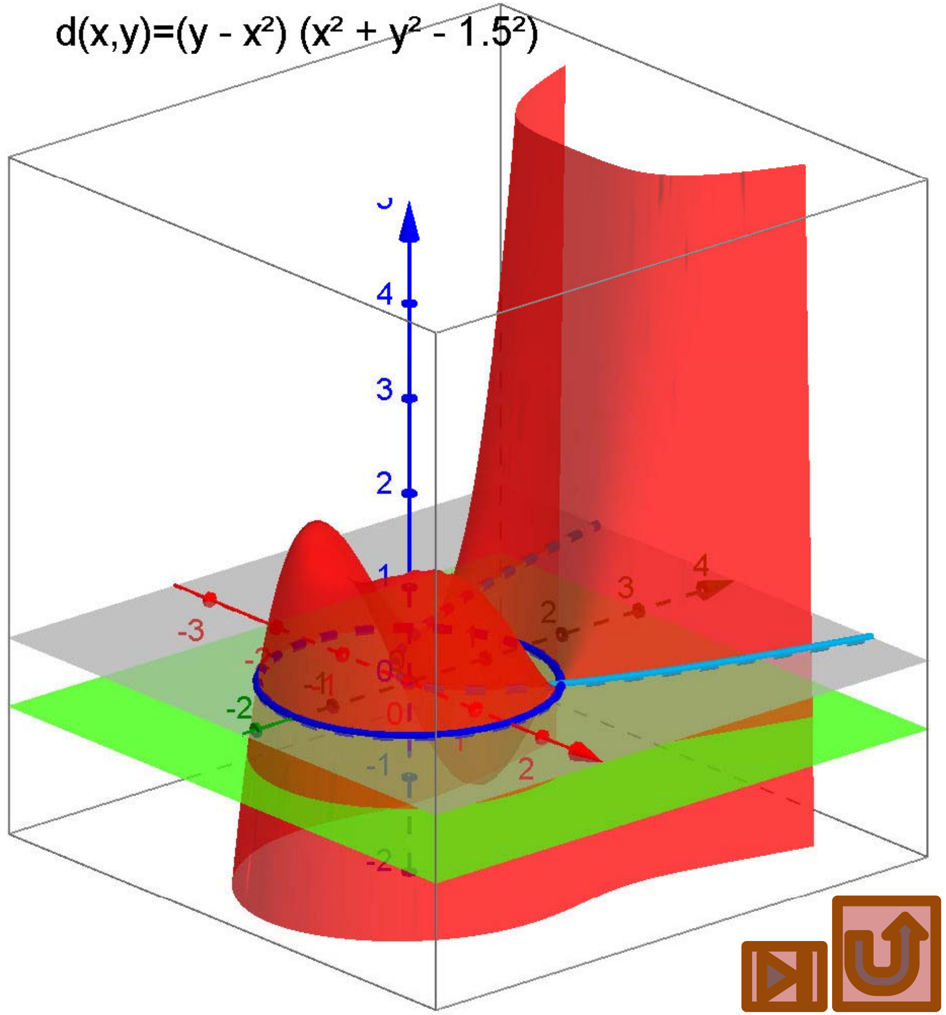
Dann hilft die 3D-Darstellung beim Verstehen

produkt-ohne3D

$$z=f(x,y)=(y-x^2-a)(x^2+y^2-r^2)=0$$

Kurvengleichung F(x,y)=0 und 3D

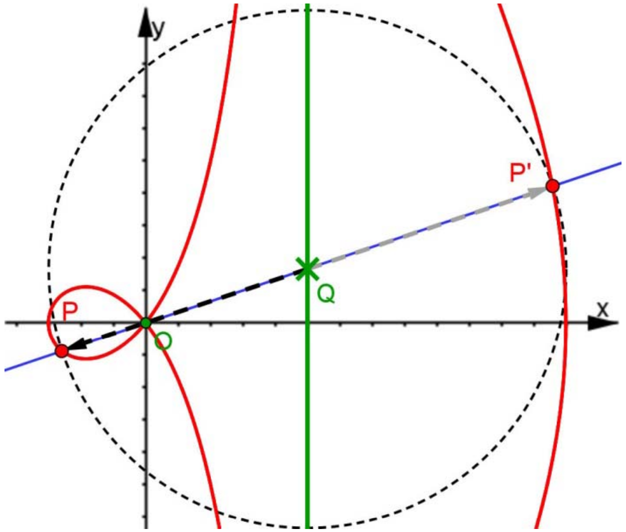


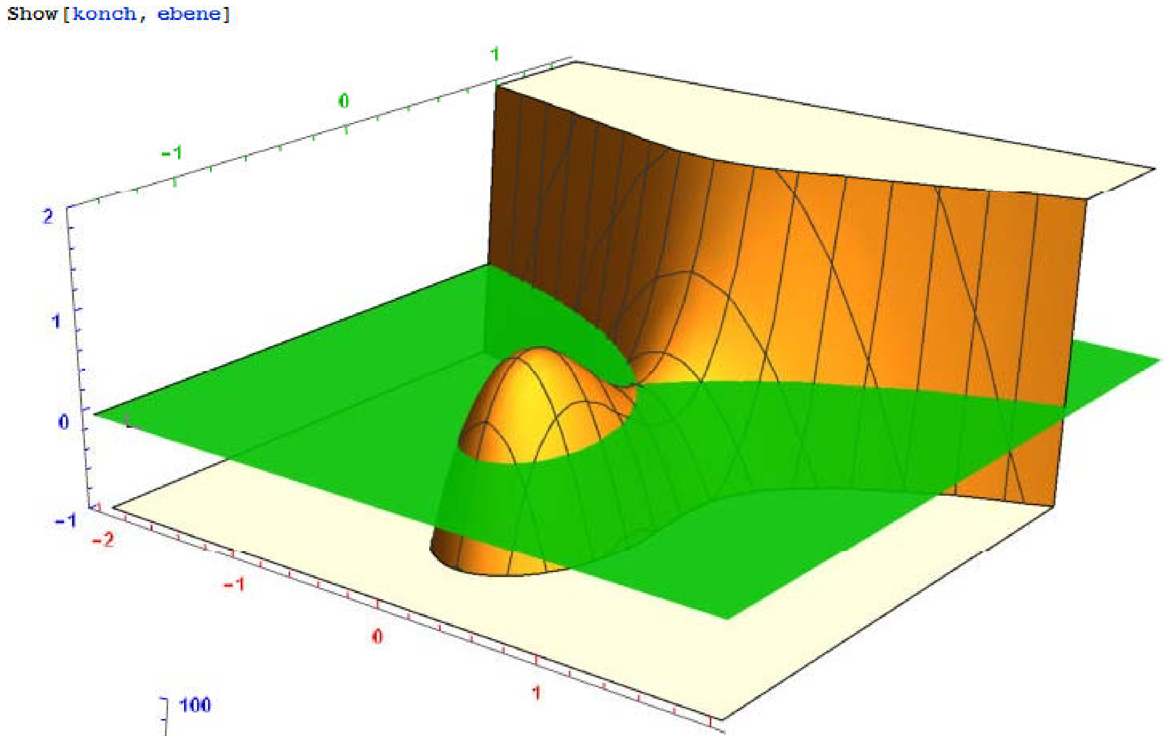


produkt3D   Mit zwei Fenstern in GeoGebra!

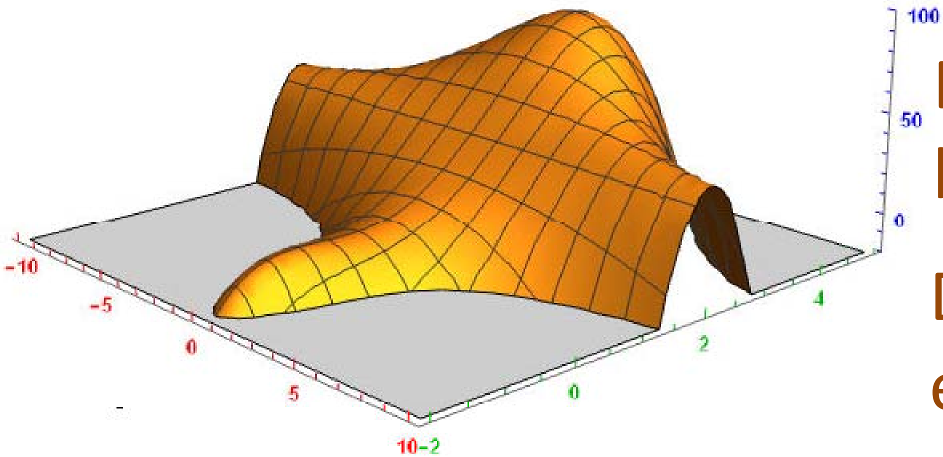
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de   www.kurven-erkunden-und-verstehen.de

3D-Darstellungen anderer Kurven





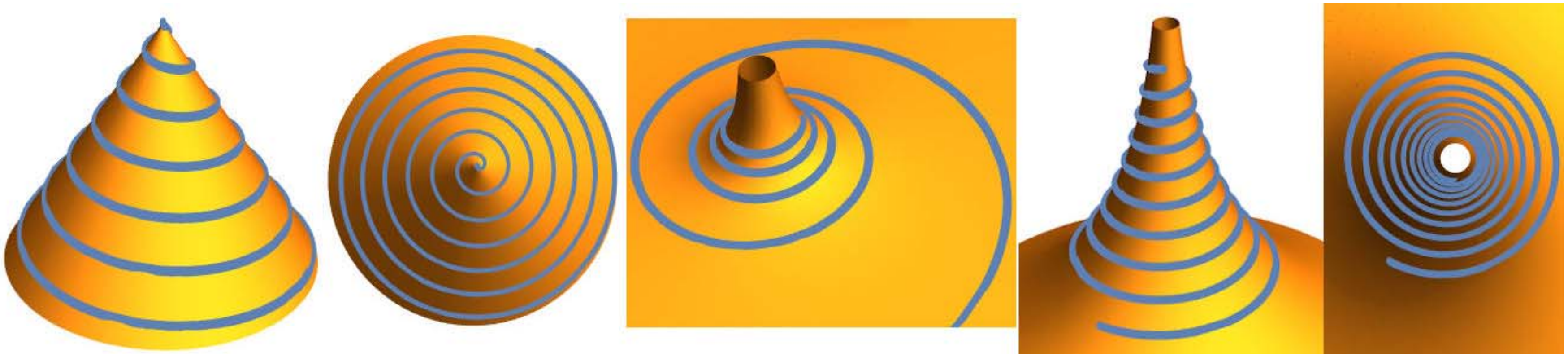
Konchoide

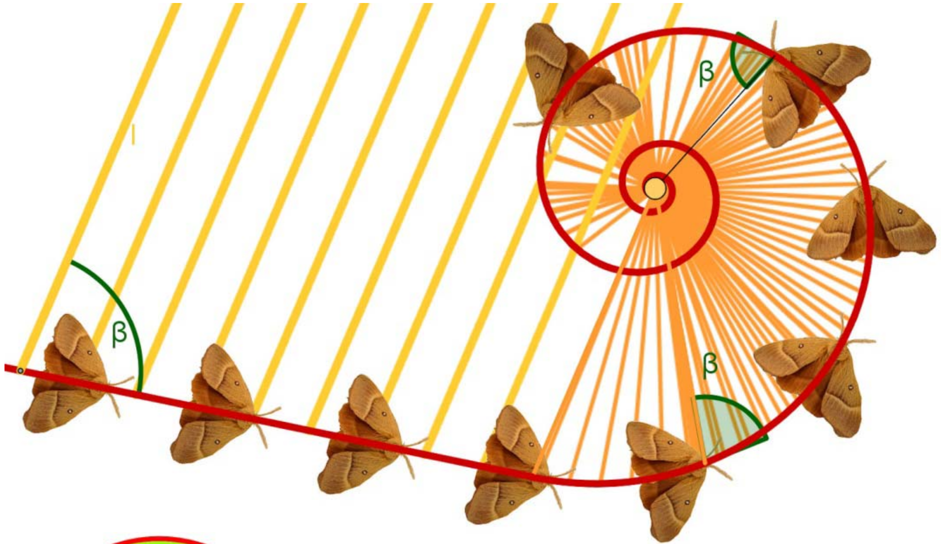


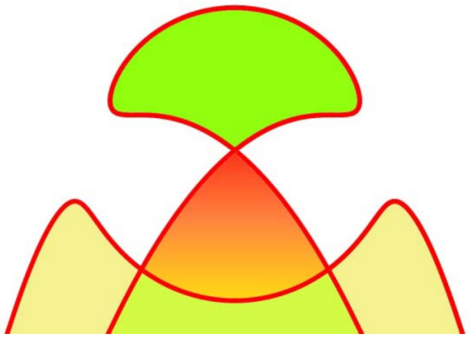
Durch Schnitte in anderer Höhe
bilden sich Kurvenfamilien.

Doch manchmal kommt
es anders als man denkt.

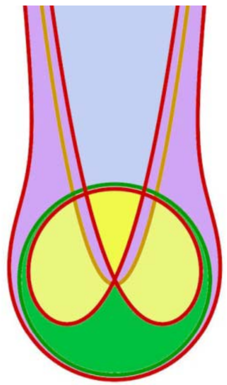
www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de







Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



www.mathematik-sehen-und-verstehen.de www.kurven-erkunden-und-verstehen.de